

Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

66. BAND, 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 15. DEZEMBER 1956)



BERLIN · GÜTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER - VERLAG

1956

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechslungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O , sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hierzu unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,

K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,

E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,

F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,

H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

66. Band

Inhalt

3. Heft

Seite

Meyer-König, W., u. K. Zeller, Lückenumkehrsätze und Lückenperfektheit . . .	203
Petersen, G. M., Almost Convergence and two Matrix Limitation Methods . . .	225
Djerasimović, B., Über die Kettenbruchentwicklung quadratischer Irrationalzahlen . . .	228
Scott, W. R., On a result of B. H. Neumann . . .	240
Petersson, H., Über Partitionenprobleme in Verbindung mit Potenzresten nach einem Primzahlmodul. . .	241
Baer, R., NOETHERSche Gruppen . . .	269

Lückenumkehrsätze und Lückenperfektheit

Von

W. MEYER-KÖNIG und K. ZELLER

§ 1. Einleitung

Das Ziel der folgenden Seiten ist ein neuer Zugang zu den Lückenumkehrsätzen der Limitierungstheorie. Nach dem Aufbau einer mit funktional-analytischen Hilfsmitteln arbeitenden Beweismethode wird dieselbe auf einige spezielle Fälle angewandt. Zum Beispiel untersuchen wir das bekannte high-indices-Theorem und den entsprechenden Satz für das BOREL-Verfahren.

Wir geben zunächst einige Beispiele von Lückenumkehrsätzen. Unter einer Lückenbedingung für die unendliche Reihe

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

mit den Teilsummen $s_k = \sum_{l=0}^k u_l$ ($k=0, 1, \dots$) verstehen wir eine Bedingung der Form

$$(2) \quad u_k = 0 \quad \text{für} \quad k \neq k_0, k_1, \dots,$$

wobei $\{k_l\}_{l=0, 1, \dots}$ irgendeine gegebene Indexfolge (k_l ganz, $0 \leq k_0 < k_1 < \dots$) ist. Daß Lückenbedingungen die Rolle von TAUBER Bedingungen spielen können, ist in einfachen Fällen leicht einzusehen. Zum Beispiel gilt für das CESÀRO-Verfahren erster Ordnung der wohlbekannte

Satz 1.1 (Lückensatz für das C_1 -Verfahren). *Ist die Reihe (1) C_1 -summierbar und ist die Lückenbedingung (2) erfüllt für eine Folge $\{k_l\}$, bei der*

$$(3) \quad k_{l+1} - k_l > \vartheta k_l \quad \text{für ein } \vartheta > 0 \quad (l=0, 1, \dots)$$

gilt, so ist die Reihe (1) konvergent.

Man beweist dies auf wenigen Zeilen wie folgt. Es sei

$$t_m = \frac{1}{m+1} (s_0 + \dots + s_m) \quad (m=0, 1, \dots)$$

und etwa $\lim t_m = 0$. Setzen wir $[(1+\vartheta)k_l] = n$, so ist

$$(n+1)t_n = s_0 + \dots + s_{k_l-1} + (n - k_l + 1)s_{k_l}$$

oder

$$s_{k_l} = \frac{n+1}{n-k_l+1} t_n - \frac{k_l}{n-k_l+1} t_{k_l-1},$$

woraus $s_{k_l} \rightarrow 0$ für $l \rightarrow \infty$, also $s_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ folgt.

Ganz wesentlich tiefer als Satz 1.1 liegt der entsprechende Satz 1.2 für das ABEL-Verfahren (A -Verfahren). Die Reihe (1) heißt A -summierbar, wenn

das Funktionselement $\sum u_k x^k$ für $|x| < 1$ konvergiert' und wenn $\lim_{x \rightarrow 1-} \sum u_k x^k$ existiert.

Satz 1.2 (Lückensatz für das A -Verfahren). *Ist die Reihe (1) A -summierbar und ist die Lückenbedingung (2) erfüllt für eine Folge $\{k_i\}$, für die (3) gilt, so ist die Reihe (1) konvergent.*

Satz 1.2 folgt als Spezialfall aus

Satz 1.3 (High-indices-Theorem). *Erfüllt die reelle Zahlenfolge $\{\lambda_k\}_{k=0, 1, \dots}$ ($0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$) die Bedingung*

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k > \vartheta \lambda_k \quad \text{für ein } \vartheta > 0 \quad (k = 0, 1, \dots)$$

und existiert

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{k=0}^{\infty} u_k e^{-\lambda_k x},$$

wobei $\sum u_k e^{-\lambda_k x}$ für $x > 0$ als konvergent vorausgesetzt ist, so ist die Reihe (1) konvergent.

Das high-indices-Theorem wurde von LITTLEWOOD [1910] vermutet und von HARDY-LITTLEWOOD [1926] bewiesen. Einen besonders kurzen Beweis gab INGHAM [1937] (vgl. HARDY [1949, S. 172ff.]). Weitere Beweise stammen von WIENER [1936] (vgl. dazu LEVINSON [1938], [1940, S. 186ff.] und von PITT [1938₁]. Vgl. ferner BOSANQUET [1944], LORENTZ [1948].

Um nun den für uns wesentlichen Gesichtspunkt zu kennzeichnen, kehren wir zum Satz 1.2 zurück. Wir ziehen noch den folgenden Satz heran: Ist (1) A -summierbar und die Folge $\{s_k\}$ beschränkt, so ist (1) C_1 -summierbar. Diesen $A \rightarrow C_1$ -Satz, der z.B. in der Theorie des O -Umkehrsatzes des A -Verfahrens eine Rolle spielt, sehen wir von dorthier als bekannt an. Kombinieren wir ihn mit dem Lückensatz für das C_1 -Verfahren, so ergibt sich Satz 1.2 für den Fall, daß noch zusätzlich die Beschränktheit der Folge $\{s_k\}$ vorausgesetzt ist. Die Schwierigkeit beim Beweis des Satzes 1.2 liegt also darin, ohne diese Zusatzvoraussetzung auszukommen. (Eine entsprechende Schwierigkeit tritt beim O -Satz nicht auf, da man aus der A -Summierbarkeit von (1) zusammen mit der Bedingung $u_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$ ohne Mühe auf die Beschränktheit der Folge $\{s_k\}$ schließt.)

Hier setzt nun die vorliegende Untersuchung ein. Ihr wesentliches Ergebnis ist eine Schlußweise, welche in vielen Fällen gestattet, aus einem Lückensatz für beschränkte Folgen den entsprechenden Lückensatz für beliebige Folgen herzuleiten. Mit dem Nachweis, daß diese Schlußweise im Fall des A -Verfahrens möglich ist (§ 5), wird dann ein neuer Beweis des Satzes 1.2 geführt sein.

Ähnlich wie beim A -Verfahren liegen die Verhältnisse bei vielen anderen Verfahren. Benützt man die von den O -Umkehrsätzen her bekannten Hilfsmittel, man denke z.B. an den Hauptsatz der WIENERSchen Theorie, so kann man verhältnismäßig leicht scharfe Lückensätze für beschränkte Folgen herleiten. Die Ausdehnung auf beliebige Folgen ist dann die gegenüber den

O -Sätzen bei den Lückensätzen neu auftretende Schwierigkeit, zu deren Überwindung hier beigetragen werden soll.

Die Grundlage unserer Schlußweise (§ 3, § 4) bildet die schon bekannte Tatsache, daß ein permanentes perfektes Matrixverfahren entweder konvergenzgleich ist oder mindestens eine beschränkte divergente Folge limitiert (MAZUR-ORLICZ [1955], WILANSKY-ZELLER [1955]). Wir werden dies erneut und ausführlich mit möglichst elementaren Hilfsmitteln beweisen. Ständig arbeiten wir mit dem Begriff des FK -Raums. Weiterhin sind für unsere Zwecke wichtig die Begriffe Lückenperfektheit und lückenperfekter Teil eines Verfahrens, die sich in natürlicher Weise einstellen. Die Anwendung unserer Methode auf spezielle Verfahren (§ 5, § 6) kommt auf gewisse Approximationsfragen in den Wirkfeldern hinaus. Hierbei lassen sich Ergebnisse von ZELLER [1953₃] benützen.

In § 5 behandeln wir im wesentlichen die CESÀROSchen und das ABELSche Verfahren, ferner das DIRICHLET-Reihen-Verfahren. Letzteres führt zum high-indices-Theorem, das auf einen O -Umkehrsatz zurückgeführt wird.

In § 6 untersuchen wir die EULER-KNOPPSchen Verfahren E_α ($0 < \alpha \leq 1$) und das BORELSche Verfahren B (Definitionen siehe später). Es ergibt sich ein neuer Beweis der folgenden beiden Sätze.

Satz 1.4 (Lückensatz für das E_α -Verfahren). *Ist die Reihe (1) E_α -summierbar und ist die Lückenbedingung (2) erfüllt für eine Folge $\{k_l\}$, bei der*

$$(4) \quad k_{l+1} - k_l > \vartheta \sqrt{k_l} \quad \text{für ein } \vartheta > 0 \quad (l = 0, 1, \dots)$$

gilt, so ist die Reihe (1) konvergent.

Satz 1.5 (Lückensatz für das B -Verfahren). *Ist die Reihe (1), für die*

$$(5) \quad \overline{\lim}_k \sqrt[k]{|u_k|} < \infty$$

ist, B -summierbar und ist die Lückenbedingung (2) erfüllt für eine Folge $\{k_l\}$, für die (4) gilt, so ist die Reihe (1) konvergent.

Ist die Reihe (1) E_α -summierbar, so ist sie auch B -summierbar, außerdem gilt dann (5). Daher ist Satz 1.4 in Satz 1.5 enthalten.

Satz 1.4 (im Fall $\alpha = \frac{1}{2}$) wurde unter der Zusatzvoraussetzung $s_k = O(k^\gamma)$ für ein $\gamma > 0$ von MEYER-KÖNIG [1939, Satz 9], und nahezu in der oben angegebenen Form von ERDÖS [1952] bewiesen. Satz 1.5 geht im wesentlichen, nämlich mit der Voraussetzung $\overline{\lim}_k \sqrt[k]{|u_k|} \leq 1$ an Stelle von (5), auf PITT [1938₁, Theorem 17] zurück. Daß dann schon die schwächere Voraussetzung (5) ausreicht, kann mit Hilfe eines funktionentheoretischen Lückensatzes gezeigt werden (MEYER-KÖNIG [1953]).

Die eben angedeutete funktionentheoretische Reduktionsmethode und die funktionalanalytische Methode, die wir in dieser Arbeit darstellen, lassen sich — einzeln oder zusammen — noch auf weitere spezielle Verfahren anwenden, z. B. auf die durch analytische Fortsetzung definierte Variante des

ABEL-Verfahrens. Ähnliche Betrachtungen sind auch bei Umkehrsätzen anderer Art (mit Schwankungsbedingungen oder funktionentheoretischen Bedingungen) nützlich. Darauf werden wir zurückkommen.

§ 2. Limitierungstheoretische Grundlagen

Wir untersuchen *Matrixverfahren zur Limitierung von Zahlenfolgen*. Ist $\{s_k\}_{k=0,1,\dots}$ eine Folge komplexer Zahlen, so setzen wir $\{s_k\} = \tilde{s}$ und reden von der Folge oder Stelle $\tilde{s}$. Ist die Folge $\{s_k\}$ konvergent (beschränkt, ...), so sagen wir, wenn keine Verwechslung zu befürchten ist, $\tilde{s}$ sei konvergent (beschränkt, ...). Die s_k heißen die Koordinaten von $\tilde{s}$. Ist $A = \{a_{mk}\}_{m,k=0,1,\dots}$ eine Matrix mit komplexen Elementen, so bilden wir die Transformation

$$(1) \quad t = A \tilde{s} \equiv t_m = \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk} s_k \quad (m = 0, 1, \dots).$$

$\tilde{s}$ heißt *A-limitierbar*, wenn alle t_m und $\lim t_m$ existieren. Die *A-limitierbaren* $\tilde{s}$ fassen wir zum *Folgenwirkfeld* $\mathfrak{A}$ des Verfahrens A zusammen. Jedem $\tilde{s}$ ordnen wir eine Stelle $u = \{u_k\}_{k=0,1,\dots}$ und eine Reihe $\sum_0^{\infty} u_k$ zu vermöge $s_k = \sum_{l=0}^k u_l$. Im folgenden soll zwischen $\tilde{s}$, u und $\sum u_k$ stets diese Beziehung bestehen, analog für t , v und $\sum v_k$, alles auch bei Einführung zusätzlicher Indizes. Die u mit $\tilde{s} \in \mathfrak{A}$ fassen wir zum *Reihenwirkfeld* $\tilde{\mathfrak{A}}$ zusammen. $\mathfrak{A}$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$ sind eineindeutig aufeinander abgebildet. Indem wir mit jedem der beiden Felder $\mathfrak{A}$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$ gleichzeitig auch das andere ins Auge fassen, sprechen wir kurz vom *Wirkfeld* des Verfahrens A . Ist $u \in \tilde{\mathfrak{A}}$, so sagen wir, A summiere u (oder $\sum u_k$). Unter dem *Nullwirkfeld* $\mathfrak{A}_0$ bzw. $\tilde{\mathfrak{A}}_0$ von A verstehen wir diejenigen $\tilde{s} \in \mathfrak{A}$ bzw. $u \in \tilde{\mathfrak{A}}$, für die $\lim t_m = 0$ ist.

Bei (1) handelt es sich um eine Folge-Folge-(FF-)Transformation; wir sagen daher, das Verfahren A (so wie es bisher erklärt wurde) sei in der FF-Form gegeben. Wir untersuchen aber auch Matrixverfahren A — und verwenden dabei genau dieselben Bezeichnungen wie bisher —, bei denen der Zusammenhang zwischen $\tilde{s}$ und u einerseits, t und v andererseits nicht in der Form (1), sondern mit Hilfe einer Matrix A' oder A'' oder A''' durch eine der Transformationen

$$(2) \quad t = A' u, \quad v = A'' u, \quad v = A''' \tilde{s}$$

hergestellt wird. Im zweiten Fall z.B. heißt $\tilde{s} \in \mathfrak{A}$, daß v existiert und $\sum v_k$ (d.h. $\lim t_m$) konvergiert, usw. Je nach der zugrunde liegenden Transformation sagen wir in den Fällen (2), das Verfahren A sei in der RF- bzw. RR- bzw. FR-Form gegeben. Oft existiert ein Matrixverfahren in mehreren der genannten Formen; z.B. läßt sich eine FR-Matrix leicht zu einer FF-Matrix, eine RR-Matrix leicht zu einer RF-Matrix umformen. Stets soll zwischen $\tilde{s}$, u und t , v eine der Beziehungen (1) und (2) bestehen.

Statt m verwenden wir auch einen stetigen Parameter μ . Der Übergang von v_μ zu t_μ geschieht dann durch Integration. Eine Matrix mit unstetigem $m=0, 1, \dots$ bezeichnen wir als eine gewöhnliche Matrix.

Stets bedeutet $\mathfrak{k}$ eine Folge $\{k_l\}_{l=0,1,\dots}$ ganzer Zahlen, für die $0 \leq k_0 < k_1 < \dots$ ist. Ist ein $\mathfrak{k}$ und ein u gegeben, so spielt eine Rolle die *Lückenbedingung* $u_k = 0$ für $k \neq k_0, k_1, \dots$ [wir schreiben dafür künftig: $u_k = 0$ ($k \neq k_l$)]. Unter dem zu einem gegebenen $\mathfrak{k}$ gehörigen *Lückenumkehrsatz* des Verfahrens A verstehen wir die Aussage: Ein A -limitierbares $\mathfrak{s}$ mit $u_k = 0$ ($k \neq k_l$) ist konvergent. Dies ist — abgesehen von Anwendbarkeitsfragen, die bei zeileninfiniten Matrizen auftreten können — gleichbedeutend damit, daß die Matrix A^* mit den Elementen

$$a_{ml}^* = a_{mk_l} + \dots + a_{m, k_{l+1}-1} \quad (m, l = 0, 1, \dots),$$

die aus (der *FF-Form* von) A durch *Zusammenlegen von Spalten* (auch Weglassen von Anfangsspalten, falls $k_0 > 0$) entsteht, keine divergenten Folgen limitiert. Liegt das Verfahren in der *RF-Form* vor, so hat man von $A' = \{a'_{mk}\}$ durch *Spaltenauswahl* zu der Matrix A'^* mit den Elementen

$$a_{ml}'^* = a'_{mk_l} \quad (m, l = 0, 1, \dots)$$

überzugehen. Entsprechendes gilt bei der *FR-* bzw. *RR-Form* und bei stetigem Parameter μ .

Im folgenden nehmen wir nun stets an, daß das *Matrixverfahren* A (und damit jedes zugehörige A^*) *permanent* ist. Bei der Aufstellung von Lückenumkehrsätzen geht es dann darum, solche $\mathfrak{k}$ zu finden, für die das Wirkfeld $\mathfrak{A}^*$ genau aus den konvergenten Folgen besteht, d. h. A^* konvergenzgleich ist.

Im Rest dieses Paragraphen machen wir erste einfache (im wesentlichen bekannte) Anwendungen der letzten Überlegung. Der Hauptteil unserer Untersuchung beginnt mit § 3.

Hilfssatz 2.1. *Das permanente, in der FF-Form durch die gewöhnliche Matrix A gegebene Verfahren A sei konvergenzgleich. Dann ist*

$$(3) \quad \lim_k \sup_m |a_{mk}| > 0.$$

Beweis. Wir gehen indirekt vor: Es sei $\lim_k \sup_m |a_{mk}| = 0$. Wir wählen ein $\mathfrak{k}$ mit $\sup_m |a_{mk_l}| < 2^{-l}$ und setzen $s_k = 0$ ($k \neq k_l$), $s_k = 1$ ($k = k_l$). Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $2^{-n} < \varepsilon$ (n ganz, ≥ 0), so ist

$$|t_m| = \left| \sum_{l=0}^{\infty} a_{mk_l} \right| \leq \sum_{l=0}^n |a_{mk_l}| + \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \leq \sum_{l=0}^n |a_{mk_l}| + \frac{1}{2^n} < \varepsilon + \varepsilon \quad \text{für } m > m_0.$$

Somit strebt $t_m \rightarrow 0$, wird also $\mathfrak{s}$ limitiert. Nun ist aber $\mathfrak{s}$ divergent. Denn unendlich oft ist $s_k = 1$, andererseits ist wegen der Permanenz von A sicher nicht $\lim s_k = 1$.

Natürlich ist (3) keine hinreichende Bedingung für Konvergenzgleichheit, man nehme z. B. die Transformation $t_m = \frac{1}{2}(s_m + s_{m+1})$. Besitzt aber A die Eigenschaft (AK) — wie z. B. die C_α -Verfahren für $0 \leq \alpha \leq 1$ —, so ist dies

doch der Fall (Hilfssatz 2.2). Dabei sagen wir, A besitze (AK), wenn gilt

$$(AK) \quad \lim_r \sup_m \left| \sum_{k=r}^{\infty} a_{mk} s_k \right| = 0 \quad \text{für jedes } \mathfrak{s} \in \mathfrak{U}_0$$

(Abschnittskonvergenz im Nullwirkfeld). (AK) ist äquivalent mit

$$(AB) \quad \sup_{m,n} \left| \sum_{k=0}^n a_{mk} s_k \right| < \infty \quad \text{für } \mathfrak{s} \in \mathfrak{U}_0$$

(Abschnittsbeschränktheit im Nullwirkfeld), wovon wir jedoch keinen Gebrauch machen. (Über (AK) und (AB) vgl. WILANSKY-ZELLER [1956] und die dort angegebene Literatur.) Über (AK) bemerken wir noch: Ist A ein (AK)-Verfahren, dann auch jedes aus A durch Spaltenzusammenfassung hervorgehende A^* , wie man unmittelbar einsieht.

Hilfssatz 2.2. *Besitzt das permanente, in der FF-Form durch die gewöhnliche Matrix A gegebene Verfahren A die Eigenschaft (AK), so ist A genau dann konvergenzgleich, wenn (3) gilt.*

Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, daß (3) hinreichend für Konvergenzgleichheit ist. Sei etwa $\lim t_m = 0$, also $\mathfrak{s} \in \mathfrak{U}_0$; zu zeigen ist $\lim s_k = 0$. Wegen (3) dürfen wir

$$\sup_m |a_{mk}| > \delta \quad \text{für ein } \delta > 0 \quad (k = 0, 1, \dots)$$

annehmen. Wir bestimmen die Indizes $n = n(k)$ so, daß

$$\sup_m |a_{mk}| = |a_{nk}| > \delta \quad (k = 0, 1, \dots)$$

ist. Wegen (AK) strebt

$$y_r = \sup_m \left| \sum_{k=r}^{\infty} a_{mk} s_k \right| \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty).$$

Für $k = 0, 1, \dots$ ist nun

$$|a_{nk} s_k| = \left| \sum_{p=k}^{\infty} a_{np} s_p - \sum_{p=k+1}^{\infty} a_{np} s_p \right| \leq y_k + y_{k+1},$$

also gilt

$$|s_k| \leq \frac{1}{\delta} (y_k + y_{k+1}) \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Hilfssatz 2.2 wenden wir nun auf das C_1 -Verfahren an. Daß C_1 , auf der Transformation $t_m = (m+1)^{-1} \sum_{k=0}^m s_k$ beruhend, ein Verfahren mit (AK) ist, stellt man ganz leicht fest. Nun geben wir ein $\mathfrak{k}$ vor. In der l -ten Spalte von C_1^* stehen die Elemente

$$c_{ml}^* = 0 \quad \text{für } 0 \leq m \leq k_l - 1,$$

$$c_{ml}^* = \frac{m - k_l + 1}{m + 1} \quad \text{für } k_l \leq m \leq k_{l+1} - 1,$$

$$c_{ml}^* = \frac{k_{l+1} - k_l}{m + 1} \quad \text{für } k_{l+1} \leq m < \infty.$$

Daraus folgt

$$\sup_m |c_{m_l}^*| = \frac{k_{l+1} - k_l}{k_{l+1}} \quad (l = 0, 1, \dots).$$

Nach Hilfssatz 2.2 ist C_1^* also genau dann konvergenzgleich, wenn

$$\lim_l \frac{k_{l+1} - k_l}{k_{l+1}} > 0$$

ist. Diese letzte Bedingung ist äquivalent mit

$$(4) \quad \lim_l \frac{k_{l+1} - k_l}{k_l} > 0.$$

Setzen wir nämlich $(k_{l+1} - k_l)k_l^{-1} = x_l$, $(k_{l+1} - k_l)k_{l+1}^{-1} = y_l$, so ist $y_l = f(x_l)$, wobei $f(x) = \frac{x}{1+x}$ für $x > 0$ wächst. Damit ergibt sich der bekannte, in der einen Richtung auch in der Einleitung bewiesene

Satz 2.3 (Lückensatz für das C_1 -Verfahren). *Die Bedingung $u_k = 0$ ($k \neq k_l$) ist genau dann eine Umkehrbedingung des C_1 -Verfahrens, wenn (4) erfüllt ist.*

Nur wenige der geläufigen Verfahren besitzen (AK). Im allgemeinen müssen wir daher zur Aufstellung von Lückensätzen schärfere Hilfsmittel heranziehen, als sie für Satz 2.3 nötig sind. Als solche kommen die von den O -Sätzen her bekannten Methoden in Frage. Sie liefern in der Regel zunächst aber nur Lückenumkehrsätze für beschränkte Folgen. Zu voller Wirksamkeit in der beabsichtigten Richtung kommen sie erst, wenn es gelingt, aus Lückensätzen für beschränkte Folgen solche für beliebige Folgen (genauer: für Folgen mit geringerer Größenordnungsbeschränkung) abzuleiten. Ein Verfahren, welches dies in vielen Fällen leistet, wird im folgenden aufgebaut.

§ 3. Funktionalanalytische Grundlagen

Wir machen von der Theorie der FK -Räume Gebrauch (vgl. etwa MAZUR-ORLICZ [1955]; WŁODARSKI [1955]; ZELLER [1951], [1953₂]).

Ein F -Raum $\mathfrak{F}$ ist ein linearer Raum, in dem durch abzählbar viele Halbnormen $\|x\|_i$ ($i = 0, 1, \dots$) eine separierte Topologie und eine gleichmäßige Struktur erklärt sind, und der bezüglich dieser Struktur die Vollständigkeitseigenschaft besitzt. Ein FK -Raum ist ein F -Raum, der aus Stellen $x = \{x_k\}$ besteht und in dem die Abbildungen $x \rightarrow x_k$ linear und stetig sind. Ein FK -Raum $\mathfrak{G}$, der mehr Stellen als ein FK -Raum $\mathfrak{F}$ enthält, besitzt eine schwächere Topologie als $\mathfrak{F}$. Sind in einem FK -Raum alle Halbnormen Null außer einer, so sprechen wir von einem BK -Raum. Eine Grundmenge in einem FK -Raum ist gekennzeichnet durch die Eigenschaft, daß die (endlichen) Linearkombinationen aus Elementen der Grundmenge im Raum dicht liegen. Wir setzen

$$e = \{1, 1, 1, \dots\}, \quad e_0 = \{1, 0, 0, \dots\}, \quad e_1 = \{0, 1, 0, \dots\}, \quad \dots$$

Unter einer *abbrechenden Stelle* verstehen wir ein x mit $x_k = 0$ von einer Stelle an. Eine abbrechende Stelle ist eine Linearkombination der e_i und umgekehrt.

Das Folgenwirkfeld $\mathfrak{A}$ eines gewöhnlichen Matrixverfahrens läßt sich — im wesentlichen auf eine Weise — als FK -Raum auffassen, also natürlich auch das Reihenwirkfeld $\tilde{\mathfrak{A}}$. Die benötigten Halbnormen sind für den FF - und RF -Fall direkt etwa bei ZELLER [1951, Satz 5.1] angegeben und damit auch für den FR - und RR -Fall bekannt. Mit den Halbnormen aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{A}}$ sind auch $\mathfrak{A}_0$ bzw. $\tilde{\mathfrak{A}}_0$ FK -Räume. Bei Matrixverfahren mit stetigem Parameter μ gilt in vielen Fällen dasselbe. Beispiele folgen später.

Wir behandeln zunächst Aussagen, in denen auf die Existenz beschränkter divergenter Folgen in Wirkfeldern (allgemeiner: in FK -Räumen) geschlossen wird. Die Sätze 3.1 und 4.2 findet man in etwas schwächerer Form mit ähnlichem Beweis bei MAZUR-ORLICZ [1955] und WILANSKY-ZELLER [1955].

Satz 3.1 (Existenz beschränkter, divergenter Folgen in FK -Räumen).

a) Bilden in einem FK -Raum $\mathfrak{F}$ die e_i ($i=0, 1, \dots$) allein oder zusammen mit e eine Grundmenge, so ist entweder jedes $x \in \mathfrak{F}$ konvergent oder gibt es ein beschränktes divergentes $y \in \mathfrak{F}$.

b) Bilden in einem FK -Raum $\tilde{\mathfrak{F}}$ die e_i ($i=0, 1, \dots$) eine Grundmenge, so ist entweder $\sum x_k$ für jedes $x \in \tilde{\mathfrak{F}}$ konvergent, oder gibt es ein $y \in \tilde{\mathfrak{F}}$ mit $\sup_i \left| \sum_{k=0}^i y_k \right| < \infty$ und divergenter Reihe $\sum y_k$.

Beweis. I: Teil a), unter der Voraussetzung, daß die e_i allein eine Grundmenge von $\mathfrak{F}$ bilden. Es gebe ein divergentes $w \in \mathfrak{F}$. Zu zeigen ist, daß ein y der geforderten Art existiert. Wir brauchen nur den Fall $\sup |w_k| = \infty$ zu verfolgen.

Wegen der Grundmengenbedingung gibt es eine Folge abbrechender Stellen $x^{(r)} = \{x_0^{(r)}, x_1^{(r)}, \dots\} \in \mathfrak{F}$ ($r=0, 1, \dots$) mit $x^{(r)} \rightarrow w$ (Grenzwertaussagen für Elemente aus $\mathfrak{F}$ sind im Sinne der F -Topologie von $\mathfrak{F}$ zu verstehen), d.h. mit $\|x^{(r)} - w\|_i \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ ($i=0, 1, \dots$). Wir richten es so ein, daß

$$(1) \quad x_{r+1}^{(r)} = x_{r+2}^{(r)} = \dots = 0 \quad (r=0, 1, \dots)$$

ist. In $\mathfrak{F}$ als einem FK -Raum hat man koordinatenweise Konvergenz, also gilt $x_k^{(r)} \rightarrow w_k$ ($r \rightarrow \infty$; $k=0, 1, \dots$). Wir konstruieren induktiv für $j=1, 2, \dots$ die Folgen

$$\begin{aligned} \delta^{(j)} &= \{z_0^{(j)}, z_1^{(j)}, \dots\} \in \mathfrak{F} \\ n_j \quad (n_j \text{ ganz, } 0 < n_1 < n_2 < \dots) \\ q_j \quad (q_j \text{ ganz, } 1 < q_1 < q_1 + 1 < q_2 < q_2 + 1 < \dots) \\ \lambda_j \quad (\lambda_j \text{ reell, } 0 < \lambda_j < 1). \end{aligned}$$

Der 0-te Induktionsschritt besteht darin, daß wir $n_0 = q_0 = 0$ setzen. Wir sehen den j -ten Schritt ($j=0, 1, \dots$) als erledigt an. Er führte, falls $j \geq 1$

ist, zu $\mathfrak{z}^{(j)}, n_j, q_j, \lambda_j$, wobei noch gelten soll

$$(2) \quad \|\mathfrak{z}^{(j)}\|_l \leq \frac{1}{2^j} \quad \text{für } l = 0, \dots, j;$$

$$(3) \quad |z_l^{(j)}| \leq \frac{1}{2^j} \quad \text{für } l = 0, \dots, q_{j-1} + 1;$$

$$(4) \quad z_l^{(j)} = 0 \quad \text{für } l = q_j + 1, q_j + 2, \dots;$$

$$(5) \quad \max\{|z_{q_{j-1}+2}^{(j)}|, \dots, |z_{q_j}^{(j)}|\} = |z_{n_j}^{(j)}| = \frac{1}{\lambda_j} \quad \text{mit } q_{j-1} + 2 \leq n_j \leq q_j.$$

Beim $(j+1)$ -ten Schritt, den wir jetzt beschreiben, machen wir für $\mathfrak{z}^{(j+1)}$ den Ansatz

$$\mathfrak{z}^{(j+1)} = \mathfrak{x}^{(q)} - \mathfrak{x}^{(p)} \quad (q > p).$$

Wir wählen eine Nummer p , so daß für $q > p$ die Forderungen

$$(2^*) \quad \|\mathfrak{z}^{(j+1)}\|_l \leq \frac{1}{2^{j+1}} \quad \text{für } l = 0, \dots, j+1,$$

$$(3^*) \quad |z_l^{(j+1)}| \leq \frac{1}{2^{j+1}} \quad \text{für } l = 0, \dots, q_j + 1$$

erfüllt sind. Dies ist möglich, denn wegen $\mathfrak{x}^{(r)} \rightarrow w$ gilt $\lim_{p, q \rightarrow \infty} \|\mathfrak{x}^{(q)} - \mathfrak{x}^{(p)}\|_2 = 0$ ($i = 0, 1, \dots$), und wegen $x_k^{(r)} \rightarrow w_k$ gilt $\lim_{p, q \rightarrow \infty} (x_k^{(q)} - x_k^{(p)}) = 0$ ($k = 0, 1, \dots$). Weiter wählen wir — man beachte $\sup |w_k| = \infty$ — eine Nummer $m \geq p+1$ mit $|w_m| > 1$, und sodann — man beachte $x_m^{(r)} \rightarrow w_m$ — die Nummer $q > p$ mit $|x_m^{(q)}| > 1$. Wegen (1) ist $|z_m^{(j+1)}| = |x_m^{(q)}| > 1$ und

$$(4^*) \quad z_l^{(j+1)} = 0 \quad \text{für } l = q+1, q+2, \dots.$$

Daraus, zusammen mit (3*), folgt $q_j + 2 \leq m \leq q$; insbesondere ist $q_j + 1 < q$. Nun setzen wir $q = q_{j+1}$. Wegen (2*) bis (4*) gelten dann die aus (2) bis (4) bei Ersetzung von j durch $j+1$ hervorgehenden Aussagen. Den größten der Beträge

$$|z_l^{(j+1)}| \quad (l = q_j + 2, \dots, q_{j+1}),$$

unter denen $|z_m^{(j+1)}| > 1$ enthalten ist, setzen wir $= \lambda_{j+1}^{-1}$; dann ist $0 < \lambda_{j+1} < 1$. Schließlich zeichnen wir eine Nummer n_{j+1} ($q_j + 2 \leq n_{j+1} \leq q_{j+1}$) aus, für die $|z_{n_{j+1}}^{(j+1)}| = \lambda_{j+1}^{-1}$ ist. Wegen $n_j \leq q_j$ [man beachte (5) bzw. $n_0 = q_0 = 0$] ist $n_j < n_{j+1}$, ferner ist die aus (5) bei Ersetzung von j durch $j+1$ hervorgehende Aussage erfüllt. Damit ist das Induktionsverfahren abgeschlossen, und wir dürfen (2) bis (5) für $j = 1, 2, \dots$ als erfüllt ansehen.

Wegen $0 < \lambda_j < 1$ und (2) ist die Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r \mathfrak{z}^{(r)}$ konvergent. Wir setzen $\mathfrak{y} = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r \mathfrak{z}^{(r)}$. Im folgenden sei $j \geq 1$. Wegen der koordinatenweisen Konvergenz und (4) ist

$$(6) \quad y_k = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r z_k^{(r)} = \sum_{r=j}^{\infty} \lambda_r z_k^{(r)} \quad \text{für } k > q_{j-1}.$$

Insbesondere ist

$$|y_k| \leq \lambda_j |z_k^{(j)}| + \sum_{r=j+1}^{\infty} |z_k^{(r)}| \quad \text{für } q_{j-1} < k \leq q_j.$$

Schätzen wir hier den ersten Summanden rechts nach (5) und (3) durch 1, alle übrigen Summanden ($r=j+1, j+2, \dots$) nach (3) durch $\frac{1}{2^r}$ ab, so erhalten wir $|y_k| \leq 1 + \frac{1}{2^j}$. Die Folge $\{y_k\}$ ist somit beschränkt. Weiter erhalten wir aus (6), wenn wir $k=n_j$ setzen,

$$|y_{n_j}| \geq \lambda_j |z_{n_j}^{(j)}| - \sum_{r=j+1}^{\infty} |z_{n_j}^{(r)}| \geq 1 - \frac{1}{2^j}.$$

Daraus ergibt sich $\overline{\lim} |y_k| \geq 1$. Andererseits ist

$$|y_{q_{j-1}+1}| \leq \sum_{r=j}^{\infty} |z_{q_{j-1}+1}^{(r)}| \leq \sum_{r=j}^{\infty} \frac{1}{2^r} = \frac{1}{2^{j-1}}.$$

Daraus ergibt sich $\underline{\lim} |y_k| = 0$. Die Folge $\{y_k\}$ ist somit divergent.

II: Teil a), unter der Voraussetzung, daß die e_i allein keine, zusammen mit e aber eine Grundmenge von $\mathfrak{F}$ bilden. Die lineare abgeschlossene Hülle der e_i in $\mathfrak{F}$ bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{F}}$. $\overline{\mathfrak{F}}$ ist mit den Halbnormen aus $\mathfrak{F}$ ebenfalls ein FK -Raum. Es ist $\overline{\mathfrak{F}} \neq \mathfrak{F}$.

Wir überzeugen uns zuerst davon, daß $e \notin \overline{\mathfrak{F}}$. Wir wählen ein $x \in \mathfrak{F}$. Dann gibt es Zahlen λ_p und abbrechende Stellen $x^{(p)}$ ($p=0, 1, \dots$) mit $\lambda_p e + x^{(p)} \rightarrow x$ ($p \rightarrow \infty$). Nun machen wir die Annahme $e \in \overline{\mathfrak{F}}$. Dann gibt es abbrechende Stellen $y^{(p)}$ mit $y^{(p)} \rightarrow e$. Indem wir nötigenfalls zu einer Teilfolge der Stellenfolge $y^{(p)}$ übergehen, können wir erreichen, daß

$$|\lambda_p| \|y^{(p)} - e\|_i < \frac{1}{p+1} \quad (i=0, \dots, p; p=0, 1, \dots)$$

ist, d.h. $\lambda_p (y^{(p)} - e) \rightarrow 0$ strebt. Wir setzen $z^{(p)} = x^{(p)} + \lambda_p y^{(p)}$. Dann strebt

$$z^{(p)} = (\lambda_p e + x^{(p)}) + \lambda_p (y^{(p)} - e) \rightarrow x.$$

Da die $z^{(p)}$ abbrechende Stellen sind, gilt $x \in \overline{\mathfrak{F}}$. Es wäre also $\overline{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}$. Daher gilt $e \notin \overline{\mathfrak{F}}$.

Daraus folgt die Existenz eines i_0 (ganz, ≥ 0) mit der Eigenschaft: Ist x eine abbrechende Stelle, so ist mindestens eine der Aussagen $\|x - e\|_j < \frac{1}{i_0+1}$ ($j=0, \dots, i_0$) falsch. Andernfalls gäbe es nämlich zu jedem $i=0, 1, \dots$ ein abbrechendes $x^{(i)}$ mit $\|x^{(i)} - e\|_j < \frac{1}{i+1}$ ($j=0, \dots, i$), woraus $x^{(i)} \rightarrow e$, also $e \in \overline{\mathfrak{F}}$ folgen würde.

Unser nächstes Ziel ist der Nachweis, daß jedes $x \in \mathfrak{F}$ in der Form $x = \lambda e + \bar{x}$ mit $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{F}}$ dargestellt werden kann. Dabei machen wir von i_0 Gebrauch. Zunächst gibt es Zahlen λ_p und abbrechende $x^{(p)}$ ($p=0, 1, \dots$) mit

$$y^{(p)} = \lambda_p e + x^{(p)} \rightarrow x \quad (p \rightarrow \infty).$$

Wir wählen ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein p_0 mit

$$(7) \quad \|\eta^{(q)} - \eta^{(p)}\|_j < \frac{\varepsilon}{i_0 + 1} \quad (j = 0, \dots, i_0) \quad \text{für } q > p > p_0.$$

Ein Paar (p, q) mit $q > p > p_0$ halten wir nun fest. Wir wollen $|\lambda_q - \lambda_p| < \varepsilon$ nachweisen. Es sei $\lambda_q - \lambda_p \neq 0$. Dann ist $\eta^{(q)} - \eta^{(p)}$ in der Form

$$\eta^{(q)} - \eta^{(p)} = (\lambda_q - \lambda_p)(e - \mathfrak{z}) \quad (\mathfrak{z} \text{ abbrechend})$$

darstellbar. Wegen der Eigenschaft von i_0 gibt es ein j_0 ($0 \leq j_0 \leq i_0$) mit

$$\|\mathfrak{z} - e\|_{j_0} \geq \frac{1}{i_0 + 1}.$$

Aus (7) für $j = j_0$ folgt

$$|\lambda_q - \lambda_p| \|e - \mathfrak{z}\|_{j_0} < \frac{\varepsilon}{i_0 + 1}.$$

Die beiden letzten Ungleichungen ergeben $|\lambda_q - \lambda_p| < \varepsilon$. Damit ist die Konvergenz der Folge $\{\lambda_p\}$ nachgewiesen: $\lambda_p \rightarrow \lambda$. Wegen

$$\mathfrak{x}^{(p)} = \eta^{(p)} - \lambda_p e \rightarrow \mathfrak{x} - \lambda e \quad (p \rightarrow \infty)$$

können wir auf $(\mathfrak{x} - \lambda e) \in \mathfrak{F}$ schließen. Also ist $\mathfrak{x} = \lambda e + (\mathfrak{x} - \lambda e)$ eine Darstellung von $\mathfrak{x}$ in der gewünschten Form. Daß diese Darstellung eindeutig ist, sieht man ganz leicht ein; wir benötigen es aber nicht.

Der Beweis der Behauptung ergibt sich jetzt mühelos: Nach dem in I Bewiesenen, angewandt auf den FK -Raum $\mathfrak{F}$, ist entweder jedes $\bar{\mathfrak{x}} \in \mathfrak{F}$, und damit jedes $\mathfrak{x} = \lambda e + \bar{\mathfrak{x}} \in \mathfrak{F}$, konvergent, oder gibt es in $\mathfrak{F}$, und damit in $\mathfrak{F}$, ein beschränktes divergentes η .

III: Teil b). Jedem $\tilde{\mathfrak{x}} \in \tilde{\mathfrak{F}}$ ordnen wir die Stelle

$$\mathfrak{x} = \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_0 + \tilde{x}_1, \tilde{x}_0 + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2, \dots\}$$

zu. Die Gesamtheit aller dieser $\mathfrak{x}$ bildet in naheliegender Weise einen FK -Raum $\mathfrak{F}$, in dem die Bilder der $\tilde{\mathfrak{F}}$ -Elemente $\{1, 0, 0, \dots\}$, $\{0, 1, 0, \dots\}$, ..., also die Stellen

$$\{1, 1, 1, \dots\}, \{0, 1, 1, \dots\}, \{0, 0, 1, \dots\}, \dots,$$

eine Grundmenge bilden. Jede dieser Stellen ist eine Linearkombination von Stellen

$$\{1, 1, 1, \dots\}, \{1, 0, 0, \dots\}, \{0, 1, 0, \dots\}, \dots,$$

die daher ebenfalls eine Grundmenge in $\mathfrak{F}$ bilden. Die Anwendung von Teil a) auf $\mathfrak{F}$ liefert die Behauptung. Damit ist Satz 3.1 bewiesen.

§ 4. Lückenperfektheit

Wir betrachten im folgenden nur solche Matrixverfahren, deren Wirkfeld sich als FK -Raum auffassen läßt — was bei Matrizen mit stetigem ersten Parameter nicht immer zutrifft.

Bekanntlich heißt ein Matrixverfahren A perfekt, wenn $e, e_0, e_1, \dots$ eine Grundmenge in $\mathfrak{A}$ oder — äquivalent damit — wenn $e_0, e_1, \dots$ eine Grundmenge in $\tilde{\mathfrak{A}}$ bilden ($\mathfrak{A}$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$ als FK -Räume aufgefaßt). Die lineare abgeschlossene Hülle der $e, e_0, e_1, \dots$ in $\mathfrak{A}$ bzw. der $e_0, e_1, \dots$ in $\tilde{\mathfrak{A}}$ nennen wir (vgl. ZELLER [1956]) den perfekten Teil $\mathfrak{A}^P$ bzw. $\tilde{\mathfrak{A}}^P$ des Wirkfeldes. $\mathfrak{A}^P$ und $\tilde{\mathfrak{A}}^P$ sind, mit den Halbnormen von $\mathfrak{A}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{A}}$, FK -Räume, und sind ebenso wie $\mathfrak{A}$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$ vermöge $\tilde{x}_k = x_0 + \dots + x_k$ ($x \in \mathfrak{A}$, $\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{A}}$) eineindeutig aufeinander bezogen. Indem wir mit jedem der beiden Räume $\mathfrak{A}^P$ und $\tilde{\mathfrak{A}}^P$ gleichzeitig auch den andern ins Auge fassen, sprechen wir auch kurz von dem perfekten Teil des Verfahrens A . Genau dann ist A perfekt, wenn der perfekte Teil mit dem ganzen Wirkfeld zusammenfällt. Wir notieren

Hilfssatz 4.1. *Der perfekte Teil $\mathfrak{A}^P$ eines permanenten gewöhnlichen Matrixverfahrens A enthält alle beschränkten A -limitierbaren Folgen. Der perfekte Teil eines konvergenztreuen beliebigen Matrixverfahrens, dessen Wirkfeld ein FK -Raum ist, enthält alle konvergenten Folgen.*

Beweis. Der erste Teil folgt aus ZELLER [1951], Sätze 3.5 und 5.7b. Der zweite Teil — nur diesen benötigen wir später — ergibt sich daraus, daß im BK -Raum $\mathfrak{S}_C$ der konvergenten Folgen $e, e_0, e_1, \dots$ eine Grundmenge bilden. Der FK -Raum $\mathfrak{A}$ hat wegen $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{S}_C$ eine gröbere Topologie als $\mathfrak{S}_C$, daher ist die lineare abgeschlossene Hülle von $e, e_0, e_1, \dots$ im FK -Raum $\mathfrak{A}$ mindestens so groß wie im BK -Raum $\mathfrak{S}_C$, w. z. z. w.

Aus Satz 3.1 und Hilfssatz 4.1 folgt nun unmittelbar

Satz 4.2 (Existenz beschränkter divergenter Folgen im perfekten Teil). *Der perfekte Teil $\mathfrak{A}^P$ des permanenten Verfahrens A enthält entweder nur die konvergenten Folgen, oder mindestens eine beschränkte divergente Folge.*

Wie wir in § 2 sahen, sind für unsere Zwecke die aus A für beliebige $\mathfrak{f}$ durch Spaltenzusammenfassung entstehenden Verfahren A^* von Bedeutung. Wir wollen diese A^* als (die zu A gehörigen) *Lückenverfahren* bezeichnen.

Definition 4.3 (Lückenperfektheit). *Das permanente Verfahren A heißt lückenperfekt, wenn jedes zu A gehörige Lückenverfahren A^* perfekt ist.*

Ein perfektes A ist nicht notwendig lückenperfekt. Dies zeigt das Beispiel

$$3A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & -2^{-1} & 2^{-1} & \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & 2 & 1 & -2^{-2} & 2^{-2} \\ & & & & & \dots \end{pmatrix}$$

(die leeren Stellen sind mit Nullen zu besetzen). Erfüllt $g = \{g_m\}$ die Beziehung $\sum_m a_{mk} g_m = 0$ ($k=0, 1, \dots$), so ist g ein Vielfaches von $\bar{g} = \{0, 1, \frac{1}{2}, -1, \dots\}$ mit $\sum_m |\bar{g}_m| = \infty$. Nach dem bekannten Kriterium von MAZUR [1930] ist A

perfekt. Durch Zusammenfassen je zweier Spalten erhält man

$${}_3A^* = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 & \\ & & & \dots & \end{pmatrix}.$$

A^* hat dasselbe Wirkfeld (mit derselben Topologie) wie das Verfahren

$${}_3B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & \dots & \end{pmatrix},$$

das wegen der Orthogonalfolge $\mathfrak{h} = \{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ mit $\sum_m |h_m| < \infty$ nicht perfekt ist. Damit ist auch A^* nicht perfekt.

Beim folgenden Satz denken wir uns ein festes $\mathfrak{k}$ zugrunde gelegt.

Satz 4.4 (Umkehrbedingungen für lückenperfekte Verfahren). *Ist das permanente Verfahren A lückenperfekt und $u_k = 0$ ($k \neq k_i$) eine Umkehrbedingung bezüglich beschränkter Folgen, so auch bezüglich beliebiger Folgen.*

Beweis. Ist A lückenperfekt, also das zu A und $\mathfrak{k}$ gehörige Lückenverfahren A^* perfekt, und limitiert A^* keine beschränkten divergenten Folgen, so ist A^* nach Satz 4.2 konvergenzgleich.

Wir formen jetzt die Definition 4.3 zu einem für die Anwendungen bequemen Kriterium um. Folgende Sprechweise sei vereinbart. Ist $\mathfrak{F}$ ein FK -Raum, $\mathfrak{G}$ eine beliebige Untermenge von $\mathfrak{F}$ und gibt es zu einem $\mathfrak{x} \in \mathfrak{F}$ eine Folge von Stellen $\mathfrak{x}^{(p)} \in \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{x}^{(p)} \rightarrow \mathfrak{x}$ ($p \rightarrow \infty$), so sagen wir, $\mathfrak{x}$ lasse sich durch Stellen aus $\mathfrak{G}$ approximieren.

A sei permanent und ein $\mathfrak{k}$ sei gegeben. Wir bilden das zugehörige A^* . Die $u \in \mathfrak{U}$ mit $u_k = 0$ ($k \neq k_i$) fassen wir zum linearen Raum $\mathfrak{U}_i \subseteq \mathfrak{U}$ zusammen. Die in $\mathfrak{U}$ vorhandene Struktur macht auch $\mathfrak{U}_i$ zum FK -Raum (z.B. ist $\mathfrak{U}_i$ vollständig wegen der koordinatenweisen Konvergenz in $\mathfrak{U}$). $\mathfrak{U}_i$, in dieser Weise zum FK -Raum gemacht, bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}'_i$. Ist $\tilde{\mathfrak{x}} \in \mathfrak{U}'_i$ gegeben und streichen wir die Nullen an den Stellen $k \neq k_i$ weg, so erhalten wir ein $\tilde{\mathfrak{x}}^* \in \mathfrak{U}^*$. Dadurch sind $\mathfrak{U}^*$ und $\mathfrak{U}'_i$ eineindeutig aufeinander bezogen ($\mathfrak{U}^* \leftrightarrow \mathfrak{U}'_i$), und die in $\mathfrak{U}^*$ vorhandene Struktur macht $\mathfrak{U}'_i$ auf eine zweite Weise zu einem FK -Raum, den wir mit $\mathfrak{U}''_i$ bezeichnen. Wesentlich wird nachher sein, daß in $\mathfrak{U}'_i$ derselbe Konvergenzbegriff vorliegt wie in $\mathfrak{U}''_i$ (vgl. ZELLER [1951, Satz 4.5]). Die bei $\mathfrak{U}^* \leftrightarrow \mathfrak{U}'_i$ in $\mathfrak{U}'_i$ gelegenen Bilder der $e_i \in \mathfrak{U}^*$ ($i = 0, 1, \dots$) bezeichnen wir mit $e_i^{(\mathfrak{k})}$. Sie entstehen aus den einzelnen e_i durch Einstreuen

von Nullen, und zwar hat $e_i^{(t)}$ als k_i -te Koordinate eine 1, während sonst lauter Nullen vorliegen. Die folgenden Aussagen sind nun der Reihe nach äquivalent.

1. A^* ist perfekt.
2. In $\tilde{\mathfrak{U}}^*$ bilden die e_i eine Grundmenge.
3. In $\tilde{\mathfrak{U}}_t''$ bilden die $e_i^{(t)}$ eine Grundmenge.
4. In $\tilde{\mathfrak{U}}_t'$ bilden die $e_i^{(t)}$ eine Grundmenge.
5. Jedes $u \in \tilde{\mathfrak{U}}_t'$ läßt sich in $\tilde{\mathfrak{U}}_t'$ durch abbrechende Stellen approximieren.
6. Jedes $u \in \tilde{\mathfrak{U}}$ mit $u_k = 0$ ($k \neq k_l$) läßt sich in $\tilde{\mathfrak{U}}$ durch abbrechende Stellen $u^{(p)}$ mit $u_k^{(p)} = 0$ ($k \neq k_l$) approximieren.

Verwenden wir die Äquivalenz von 1. und 6., so erhalten wir, indem wir noch beliebige t in Betracht ziehen, aus Definition 4.3 das

Kriterium 4.5 (Lückenperfektheit). *Das permanente Verfahren A ist genau dann lückenperfekt, wenn sich jedes $u \in \tilde{\mathfrak{U}}$ in $\tilde{\mathfrak{U}}$ durch abbrechende Stellen approximieren läßt, die mindestens dort verschwindende Koordinaten besitzen, wo dies bei u der Fall ist.*

Die folgende Definition liegt nun nahe.

Definition 4.6 (Lückenperfekter Teil). *Ist A permanent, so verstehen wir unter dem lückenperfekten Teil von $\tilde{\mathfrak{U}}$ die Gesamtheit der $u \in \tilde{\mathfrak{U}}$, die sich in $\tilde{\mathfrak{U}}$ approximieren lassen durch abbrechende Stellen, die mindestens dort verschwindende Koordinaten besitzen, wo dies bei u der Fall ist.*

Dem lückenperfekten Teil von $\tilde{\mathfrak{U}}$ entspricht in $\mathfrak{U}$ der lückenperfekte Teil von $\mathfrak{U}$. Zusammenfassend sprechen wir auch von dem lückenperfekten Teil von A . Der lückenperfekte Teil ist im allgemeinen keine lineare Teilmenge des Wirkfeldes. Das permanente Verfahren A ist genau dann lückenperfekt, wenn der lückenperfekte Teil von A mit dem Wirkfeld $\mathfrak{U}$ zusammenfällt.

Beim folgenden Satz denken wir uns wieder ein festes t zugrunde gelegt.

Satz 4.7 (Umkehrbedingungen für den lückenperfekten Teil). *Ist das Verfahren A permanent und $u_k = 0$ ($k \neq k_l$) eine Umkehrbedingung bezüglich beschränkter Folgen, so auch bezüglich aller Folgen des lückenperfekten Teils.*

Beweis. Die Voraussetzungen seien erfüllt. Wir bilden das zu A und t gehörige Lückenverfahren A^* . A^* limitiert keine beschränkte divergente Folge, also liegt in $\mathfrak{U}^{*P}$ keine beschränkte divergente Folge. Nach Satz 4.2 enthält daher $\tilde{\mathfrak{U}}^{*P}$ nur Stellen $\tilde{x}^*$ mit konvergenter $\sum \tilde{x}_k^*$.

Nun entstamme $\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{U}}_t$ (wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie bei der Herleitung des Kriteriums 4.5) dem lückenperfekten Teil von A . $\tilde{x}$ läßt sich durch Linearkombinationen der $e_i^{(t)}$ approximieren. Bei der Abbildung $\tilde{\mathfrak{U}}_t \leftrightarrow \tilde{\mathfrak{U}}^*$ gehe $\tilde{x}$ in $\tilde{x}^*$ über ($\tilde{x}^*$ entsteht aus $\tilde{x}$ durch Wegstreichen der Nullen bei $k \neq k_l$). Daher läßt sich $\tilde{x}^*$ durch Linearkombinationen der e_i approximieren; somit liegt $\tilde{x}^*$ in $\mathfrak{U}^{*P}$. Nach der zu Beginn des Beweises angestellten Überlegung ist $\sum \tilde{x}_k^*$ konvergent, also ist auch (Einstreuen von Nullen) $\sum \tilde{x}_k$ konvergent.

§ 5. Verfahren mit (AK), CESÀRO- und ABEL-Verfahren

In diesem und im nächsten Paragraphen wenden wir unsere Überlegungen auf einige spezielle Limitierungsverfahren an. Des öfteren wird es sich um die Feststellung handeln, daß das untersuchte Verfahren lückenperfekt ist. Da wir dazu Kriterium 4.5 heranziehen, spielen Approximationsfragen in den Wirkfeldern die Hauptrolle.

Das Verfahren A sei permanent und in der FF -Form durch die gewöhnliche Matrix A gegeben. In § 2 definierten wir die Eigenschaft (AK) von A . Man prüft unmittelbar nach, daß (AK) äquivalent ist mit

$$(AK) \quad \{s_0, \dots, s_p, 0, 0, \dots\} \rightarrow \{s_0, s_1, \dots\} \quad (p \rightarrow \infty) \text{ für } \bar{s} \in \mathfrak{U}_0$$

(wie immer sind Grenzwertrelationen bei Elementen eines FK -Raums im Sinn der Topologie des Raums zu verstehen). Dies wiederum ist äquivalent mit

$$(AK) \quad \{s_0, \dots, s_p, s, s, \dots\} \rightarrow \{s_0, s_1, \dots\} \quad (p \rightarrow \infty) \text{ für } \bar{s} \in \mathfrak{U},$$

wobei $s = \lim t_m$. Daraus ersieht man, daß ein (AK)-Verfahren perfekt ist. Nun bleibt die (AK)-Eigenschaft bei Spaltenzusammenfassung erhalten. Dies ergibt

Satz 5.1 (Lückenperfektheit bei (AK)). *Ein permanentes (AK)-Verfahren ist lückenperfekt.*

Bei der Aufstellung von Lückensätzen für (AK)-Verfahren hat man also die durch Satz 4.4 gegebene Erleichterung.

Wir kommen zu den CESÀROschen Verfahren C_α ($\alpha \geq 0$), die auf den miteinander äquivalenten (permanenten) Transformationen

$$t = C_\alpha \bar{s} \equiv t_m = \binom{m+\alpha}{m}^{-1} \sum_{k=0}^m \binom{m-k+\alpha-1}{m-k} s_k,$$

$$t = C'_\alpha u \equiv t_m = \binom{m+\alpha}{m}^{-1} \sum_{k=0}^m \binom{m-k+\alpha}{m-k} u_k$$

beruhen. $\mathfrak{C}_\alpha$ ist ein BK -Raum mit der Norm $\|\bar{s}\| = \sup |t_m|$, ferner ist C_α perfekt (MAZUR [1930]). Für $0 \leq \alpha \leq 1$ besitzt C_α die (AK)-Eigenschaft, ist C_α also lückenperfekt. Jedoch gilt sogar

Satz 5.2 (Lückenperfektheit von C_α). *Die CESÀROschen Verfahren C_α ($\alpha \geq 0$) sind lückenperfekt.*

Beweis. Für festes α sei $C'_\alpha = \{c'_{mk}\}$. Nach ZELLER [1953, Satz 5] gilt

$$\{c'_{p0} u_0, \dots, c'_{pp} u_p, 0, 0, \dots\} \rightarrow \{u_0, u_1, \dots\} \quad (p \rightarrow \infty)$$

für $u \in \tilde{\mathfrak{C}}_\alpha$. Kriterium 4.5 ergibt die Behauptung.

Nun sei A das auf der (permanenten) Transformation

$$t_\mu = (1 - \mu) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k s_k = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k \quad (0 \leq \mu < 1, \mu \rightarrow 1 -)$$

beruhende ABELSche Verfahren. Mit den Halbnormen

$$\|\tilde{s}\|_0 = \sup_{0 \leq \mu < 1} |t_\mu|, \quad \|\tilde{s}\|_i = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{i+1} \right)^k |u_k| \quad (i = 1, 2, \dots)$$

ist $\mathfrak{A}$ ein FK -Raum, ferner ist A perfekt (WŁODARSKI [1955], ZELLER [1953₁]). Für $u \in \tilde{\mathfrak{A}}$ gilt

$$\{u_0 \varrho^0, u_1 \varrho^1, \dots\} \rightarrow \{u_0, u_1, \dots\} \quad (\varrho \rightarrow 1-),$$

außerdem bei festem ϱ ($0 \leq \varrho < 1$)

$$\{u_0 \varrho^0, \dots, u_p \varrho^p, 0, 0, \dots\} \rightarrow \{u_0 \varrho^0, u_1 \varrho^1, \dots\} \quad (p \rightarrow \infty)$$

(ZELLER [1953₁]). Wegen Kriterium 4.5 ergibt sich daraus (vgl. unten die ähnlichen Schlüsse bei D_λ)

Satz 5.3 (Lückenperfektheit von A). *Das ABELSche Verfahren ist lückenperfekt.*

Wir erhalten nun leicht das (bekannte) Resultat (s. Satz 1.2), daß $u_k = 0$ ($k \neq k_l$) genau dann eine Lückenbedingung für das A -Verfahren ist, wenn es ein $\vartheta > 0$ gibt, für das

$$k_{l+1} - k_l > \vartheta k_l \quad (l = 0, 1, \dots)$$

ist. Wegen Satz 4.4 braucht man nur beschränkte Folgen zu berücksichtigen. Für solche ist aber A äquivalent mit C_1 , und für C_1 steht Satz 2.3 zur Verfügung. Die analoge Überlegung können wir mit C_x anstatt A anstellen; der resultierende Lückensatz folgt wegen $C_x \rightarrow A$ natürlich auch direkt aus dem A -Satz.

Wir zeigen jetzt noch, wie wir mit Hilfe unserer Methode das *high-indices-Theorem* (Satz 1.3) auf einen O -Umkehrsatz zurückführen können.

Verwenden wir beim ABELSchen Verfahren DIRICHLET-Reihen statt Potenzreihen, so kommen wir zum D_λ -Verfahren (DIRICHLET-Reihen-Verfahren). Hierbei bedeutet λ eine gegebene reelle Folge $\{\lambda_k\}_{k=0,1,\dots}$ mit $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ und $\lambda_k \rightarrow \infty$. D_λ beruht auf der (permanenten) Transformation

$$t_\mu = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_k \mu} u_k \quad (0 < \mu < \infty, \mu \rightarrow +0).$$

Da uns das D_λ -Verfahren jetzt nur im Zusammenhang mit dem *high-indices-Theorem* interessiert, setzen wir voraus, daß es ein $\vartheta > 0$ gibt, für das

$$(1) \quad \lambda_{k+1} > (1 + \vartheta) \lambda_k \quad (k = 0, 1, \dots)$$

ist. Das genannte Theorem besteht dann in der Aussage, daß D_λ konvergenzgleich ist.

Wegen (1) strebt $\lambda_k^{-1} \log k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Daraus folgt (vgl. HARDY-RIESZ [1915, Theorem 9]), daß für $u \in \tilde{\mathfrak{D}}_\lambda$ die Reihen für die t_μ absolut konvergieren.

In der üblichen Weise zeigt man, daß $\mathfrak{D}_\lambda$ ein FK -Raum ist mit den Halbnormen

$$\|\hat{s}\|_0 = \sup_{0 < \mu < \infty} |t_\mu|, \quad \|\hat{s}\|_i = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| e^{-\lambda_k i^{-1}} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Für $u \in \tilde{\mathfrak{D}}_\lambda$ strebt

$$(2) \quad \{u_0 e^{-\lambda_0 \varrho}, u_1 e^{-\lambda_1 \varrho}, \dots\} \rightarrow \{u_0, u_1, \dots\} \quad (\varrho \rightarrow +0).$$

Dies verifiziert man ohne Schwierigkeit. Zum Beispiel ist bezüglich der 0-ten Halbnorm zu zeigen, daß

$$\sup_{0 < \mu < \infty} |t_{\mu+\varrho} - t_\mu| \rightarrow 0 \quad (\varrho \rightarrow +0)$$

gilt, was wegen der Stetigkeit von t_μ in $0 < \mu < \infty$ und wegen der Existenz von $\lim_{\mu \rightarrow +0} t_\mu$ und $\lim_{\mu \rightarrow \infty} t_\mu$ sicher richtig ist. Weiter gilt, wiederum für $u \in \tilde{\mathfrak{D}}_\lambda$, wenn ϱ ($0 < \varrho < \infty$) fest ist,

$$(3) \quad \{u_0 e^{-\lambda_0 \varrho}, \dots, u_p e^{-\lambda_p \varrho}, 0, 0, \dots\} \rightarrow \{u_0 e^{-\lambda_0 \varrho}, u_1 e^{-\lambda_1 \varrho}, \dots\} \quad (p \rightarrow \infty).$$

Auch dies weist man unmittelbar nach. Aus (2) und (3) zusammen folgt, daß sich jedes $u \in \tilde{\mathfrak{D}}_\lambda$ durch abbrechende Stellen approximieren läßt. Setzen wir nämlich $\{u_k^{-\lambda_k \varrho}\} = u^{(\varrho)}$, so können wir wegen (2) zunächst eine Folge $\{\varrho_j\}_{j=0,1,\dots}$ ($0 < \varrho_j < \infty$) so bestimmen, daß

$$\|u^{(\varrho_j)} - u\|_i < \frac{1}{j+1} \quad (i = 0, \dots, j; j = 0, 1, \dots)$$

ist. Sodann können wir wegen (3) zu jedem $j = 0, 1, \dots$ eine abbrechende Stelle $x^{(j)}$ finden, so daß

$$\|x^{(j)} - u^{(\varrho_j)}\|_i < \frac{1}{j+1} \quad (i = 0, \dots, j; j = 0, 1, \dots)$$

ist. Es gilt dann

$$\|x^{(j)} - u\|_i < \frac{2}{j+1} \quad (i = 0, \dots, j; j = 0, 1, \dots),$$

also strebt $x^{(j)} \rightarrow u$ ($j \rightarrow \infty$).

Damit ist bewiesen, daß D_λ perfekt ist. Aus Satz 4.2 folgt weiter, daß D_λ konvergenzgleich ist, wenn dies im Bereich der beschränkten Folgen der Fall ist. *Damit ist das high-indices-Theorem auf den folgenden Satz zurückgeführt: Ein beschränktes $\hat{s} \in \mathfrak{D}_\lambda$ ist konvergent.*

Diese letzte Aussage gewinnen wir leicht aus dem gleich nachher angegebenen O -Satz, wie wir jetzt noch überlegen. Es sei $\hat{s} \in \mathfrak{D}_\lambda$ und $\hat{s}$ beschränkt. Dann ist insbesondere u beschränkt; wegen

$$\frac{\lambda_k |u_k|}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} = |u_k| \left(1 + \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} \right) \leq |u_k| \left(1 + \frac{1}{\vartheta} \right)$$

($k = 1, 2, \dots$) ist also die TAUBER-Bedingung

$$(4) \quad u_k = O\left(\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right) \quad (k \rightarrow \infty)$$

erfüllt, woraus die Konvergenz von $\hat{s}$ folgt.

Der benützte O -Satz lautet: Aus $\mathfrak{s} \in \mathfrak{D}_\lambda$ und (4) folgt die Konvergenz von $\mathfrak{s}$. [Hierbei braucht (4) nicht vorausgesetzt zu werden.] Vgl. HARDY [1949, Theorem 104, S. 161 und 176].

§ 6. EULER-KNOPP- und BOREL-Verfahren

Das EULER-KNOPPSche Verfahren E_α ($0 < \alpha \leq 1$) beruht auf den miteinander äquivalenten (permanenten) Transformationen

$$t = E_\alpha \mathfrak{s} \equiv t_m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{m-k} s_k,$$

$$v = E''_\alpha u \equiv v_m = \sum_{k=0}^m \binom{m-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{m-k} u_k;$$

in der letzten Formel ist $\binom{m-1}{-1} = 1$ für $m=0$ und $\binom{m-1}{-1} = 0$ für $m=1, 2, \dots$. Setzt man

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k, \quad v(w) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m w^m,$$

so ist die Transformation auch durch die Beziehungen

$$v(w) = u\left(\frac{\alpha w}{1 - (1-\alpha)w}\right), \quad u(z) = v\left(\frac{z}{\alpha + (1-\alpha)z}\right)$$

definiert. Für $u \in \tilde{\mathfrak{G}}_\alpha$ ist daher $u(z)$ regulär in dem Kreisgebiet

$$K_\alpha(z): \quad \left| z - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \right| < \frac{1}{2-\alpha},$$

erner dreiecksstetig bei $z=1$, wenn noch $u(1) = v(1)$ gesetzt wird. Das Wirkungsfeld von E_α ist ein BK -Raum mit der Norm

$$\|u\| = \sup_m |t_m| = \sup_n \left| \sum_{m=0}^n v_m \right|,$$

ferner ist E_α perfekt (MAZUR [1930]).

Wir bereiten den Beweis des Satzes 6.5 durch einige Hilfssätze vor.

Hilfssatz 6.1. *Liegt u in $\tilde{\mathfrak{G}}_\alpha$, so sind die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} u_k \varrho^k$ für $0 \leq \varrho \leq 1$ gleichmäßig E_α -summierbar, d.h. die transformierten Reihen $\sum_{m=0}^{\infty} v_m^{(\varrho)}$ konvergieren gleichmäßig. Dabei ist $E_\alpha \sum_k u_k \varrho^k = \sum_m v_m^{(\varrho)} = u(\varrho)$ ($0 \leq \varrho \leq 1$).*

Beweis. Es gilt die Matrizenrelation

$$(1) \quad E''_\alpha(\text{diag}\{\varrho^k\}) = E''_\beta(\text{diag}\{\sigma^k\}) E''_\alpha,$$

bei der

$$\beta = \alpha + (1-\alpha)\varrho, \quad \sigma = \frac{\varrho}{\alpha + (1-\alpha)\varrho}$$

gesetzt ist. Dies erkennt man durch direkte Verifikation oder aus der funktionentheoretischen Deutung der E -Transformation. Aus $0 < \alpha \leq 1$ und $0 \leq \varrho \leq 1$ folgt $\alpha \leq \beta \leq 1$ und $0 \leq \sigma \leq 1$.

Wir setzen

$$\{v_0 \sigma^0, v_1 \sigma^1, \dots\} = \tilde{x}^{(\sigma)}, \quad \{v_0 \sigma^0, v_0 \sigma^0 + v_1 \sigma^1, \dots\} = x^{(\sigma)}.$$

Anwendung von (4) auf u liefert

$$b^{(\varrho)} = E''_{\beta} \tilde{x}^{(\sigma)}.$$

Indem wir von Reihen zu Folgen übergehen, schreiben wir dies in der Form

$$t^{(\varrho)} = E_{\beta} x^{(\sigma)}.$$

$x^{(\sigma)}$ ist wegen $u \in \tilde{\mathfrak{U}}_{\alpha}$ gleichmäßig beschränkt und konvergiert gleichmäßig gegen $v(\sigma)$. Daraus folgt unschwer (man benütze $\alpha \leq \beta \leq 1$), daß auch $t^{(\varrho)}$ gleichmäßig gegen $v(\sigma)$ konvergiert. Hierbei ist $v(\sigma) = u(\varrho)$.

Hilfssatz 6.2. Für $u \in \tilde{\mathfrak{U}}_{\alpha}$ gilt

$$\{u_0 \varrho^0, u_1 \varrho^1, \dots\} \rightarrow \{u_0, u_1, \dots\} \quad (\varrho \rightarrow 1-).$$

Beweis. Mit $b^{(\varrho)} = E''_{\alpha} \{u_k \varrho^k\}$ lautet die Behauptung

$$\lim_{\varrho \rightarrow 1-} V(\varrho) = 0 \quad \text{mit} \quad V(\varrho) = \sup_n \left| \sum_{m=0}^n (v_m^{(\varrho)} - v_m^{(1)}) \right|.$$

Für $r=0, 1, \dots$ ist $V(\varrho)$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{m=0}^r |v_m^{(\varrho)} - v_m^{(1)}| + \sup_{n>r} \left| \sum_{m=0}^{\infty} (v_m^{(\varrho)} - v_m^{(1)}) - \sum_{m=n+1}^{\infty} (v_m^{(\varrho)} - v_m^{(1)}) \right| \\ &\leq \sum_{m=0}^r |v_m^{(\varrho)} - v_m^{(1)}| + |u(\varrho) - u(1)| + \sup_{n>r} \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} v_m^{(\varrho)} \right| + \sup_{n>r} \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} v_m^{(1)} \right|, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt wegen der in ϱ ($0 \leq \varrho \leq 1$) gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_m v_m^{(\varrho)}$ (Hilfssatz 6.1) und wegen $u(\varrho) \rightarrow u(1)$, $v_m^{(\varrho)} \rightarrow v_m^{(1)}$ (m fest) für $\varrho \rightarrow 1-$.

Beim folgenden Hilfssatz denken wir uns ein festes $\mathfrak{k}$ zugrunde gelegt.

Hilfssatz 6.3. Für das Funktionselement $f(z) = \sum_0^{\infty} f_k z^k$ mit $\lim_k \sqrt[k]{|f_k|} < \infty$

sei $f_k = 0$ ($k \neq k_l$); ferner sei K ein kompakter Teil des zugehörigen (offenen) MITTAG-LEFFLER-Sterns. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom $g(z) = \sum g_k z^k$ mit $|f(z) - g(z)| < \varepsilon$ für $z \in K$ und $g_k = 0$ ($k \neq k_l$).

Beweis. Wir nehmen ein Summierungsverfahren A , das $\sum f_k z^k$ in jedem kompakten Teil des Sterns gleichmäßig summiert und das in der RF -Form durch eine zeilenfinite Matrix A' gegeben wird. Solche Verfahren erhalten wir etwa aus verschiedenen MITTAG-LEFFLERSchen Verfahren der Polynomentwicklung (vgl. z.B. KNOPP [1926]). Für genügend großes m hat nun das Polynom $\sum_k a'_{mk} f_k z^k$ die gewünschten Eigenschaften.

Hilfssatz 6.4. *Liegt $u \in \tilde{\mathfrak{E}}_\alpha$, so läßt sich für jedes feste ϱ ($0 \leq \varrho < 1$) die Stelle $u^{(\varrho)} = \{u_k \varrho^k\}$ in $\tilde{\mathfrak{E}}_\alpha$ durch abbrechende Stellen approximieren, die mindestens dort verschwindende Koordinaten besitzen, wo dies bei u der Fall ist.*

Beweis. Wir wählen ein festes ϱ ($0 \leq \varrho < 1$). Wegen $u^{(\varrho)}(z) = u(\varrho z)$ ist $u^{(\varrho)}(z)$ regulär im abgeschlossenen Kreisgebiet $\bar{K}_\alpha(z)$, $v^{(\varrho)}(w)$ regulär in $|w| \leq 1$. Nach Hilfssatz 6.3 bestimmen wir eine Polynomfolge $u^{(\varrho, p)}(z) = \sum_k u_k^{(\varrho, p)} z^k$ ($p = 0, 1, \dots$), die für $p \rightarrow \infty$ in einem $K_\alpha(z)$ ganz im Innern enthaltenden abgeschlossenen Gebiet gleichmäßig gegen $u^{(\varrho)}(z)$ konvergiert und für welche $u_k^{(\varrho, p)} = 0$ ist mindestens für diejenigen Indizes k , für die $u_k = 0$ ist. Es gibt dann ein $\delta > 0$, so daß $v^{(\varrho, p)}(w)$ und alle $v^{(\varrho, p)}(w)$ in $|w| \leq 1 + \delta$ regulär sind und daß $v^{(\varrho, p)}(w)$ dort gleichmäßig gegen $v^{(\varrho)}(w)$ konvergiert. Wir wollen nun zeigen, daß

$$(2) \quad u^{(\varrho, p)} \rightarrow u^{(\varrho)} \quad (p \rightarrow \infty)$$

strebt in $\tilde{\mathfrak{E}}_\alpha$, womit die Behauptung bewiesen sein wird. Ist

$$|v^{(\varrho, p)}(w) - v^{(\varrho)}(w)| \leq \varepsilon \quad \text{in} \quad |w| \leq 1 + \delta$$

für ein p , so gilt für dieses p nach der CAUCHYSCHEN Koeffizientenabschätzung

$$|v_m^{(\varrho, p)} - v_m^{(\varrho)}| \leq \frac{\varepsilon}{(1 + \delta)^m} \quad (m = 0, 1, \dots),$$

und weiter

$$\begin{aligned} \|u^{(\varrho, p)} - u^{(\varrho)}\| &= \sup_n \left| \sum_{m=0}^n (v_m^{(\varrho, p)} - v_m^{(\varrho)}) \right| \\ &\leq \sup_n \sum_{m=0}^n |v_m^{(\varrho, p)} - v_m^{(\varrho)}| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(1 + \delta)^m} = \frac{(1 + \delta) \varepsilon}{\delta}. \end{aligned}$$

Daraus folgt (2).

Aus Kriterium 4.5 in Verbindung mit den Hilfssätzen 6.2 und 6.4 ergibt sich

Satz 6.5 (Lückenperfektheit von E_α). *Die EULER-KNOPPSCHEN Verfahren E_α ($0 < \alpha \leq 1$) sind lückenperfekt.*

Wollen wir also den Lückensatz für das E_α -Verfahren (Satz 1.4) beweisen, so können wir uns wegen Satz 4.4 mit beschränkten Folgen begnügen. In diesem Fall führen die Hilfsmittel, die man vom O -Umkehrsatz her kennt, verhältnismäßig leicht zum Ziel. Man verwende z.B., daß für beschränkte Folgen alle E_α -Verfahren miteinander (wegen nachher fügen wir hinzu: und mit dem BOREL-Verfahren) äquivalent sind (vgl. PITT [1938₁, S. 520] oder MEYER-KÖNIG [1949, Satz 25]), oder vgl. MEYER-KÖNIG [1939, Satz 8]. Bemerkt sei noch, daß (nach ERDÖS [1952]) die Bedingung (4) in Satz 1.4 bestmöglich ist.

Wir behandeln zuletzt noch das BOREL-Verfahren (B -Verfahren), das auf der Transformation

$$v_\mu = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} u_k \quad (0 \leq \mu < \infty), \quad t_\nu = \int_0^\nu v_\mu d\mu \quad (\nu \geq 0)$$

beruht. $\sum u_k$ heißt B -summierbar, wenn $\lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu$ existiert. Das Wirkfeld $\mathfrak{B}$ ist ein FK -Raum mit den Halbnormen

$$\|\tilde{s}\|_0 = \sup_{0 \leq \nu < \infty} |t_\nu|, \quad \|\tilde{s}\|_i = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \frac{i^k}{k!} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Wir unterscheiden zwischen regulärer und singularer Summierbarkeit je nach Regularität bzw. Singularität des Funktionselementes $\sum u_k z^k$ bei $z=0$.

Satz 6.6 (Lückenperfekter Teil des B -Verfahrens). *Eine regulär B -summierbare Reihe gehört zum lückenperfekten Teil des Reihenwirkfeldes.*

Dies ergibt sich aus den Betrachtungen bei ZELLER [1953₃]. Man kombiniere den Beweis des dortigen Satzes 3 mit Hilfssatz 6.4.

Wegen Satz 4.7 genügt es also wieder, den Beweis des Satzes 1.5 für beschränkte Folgen zu führen. Hierzu benützen wir etwa die Äquivalenz von B und E_α für beschränkte Folgen (s. oben).

Ähnlich wie die EULER-Verfahren können wir TAYLOR-Verfahren behandeln. Dabei müssen wir uns allerdings auf regulär summierbare Reihen (vgl. MEYER-KÖNIG und ZELLER [1953]) beschränken. Lassen wir nämlich singuläre Summierbarkeit zu, so besitzt das TAYLOR-Verfahren keine nichttriviale Lückenumkehrbedingung.

Literatur

Mit F, R, Z wird auf die Referate in den Fortschritten der Mathematik, den Mathematical Reviews und dem Zentralblatt für Mathematik hingewiesen.

BOSANQUET, L. S. [1944]: Note on the converse of Abel's theorem. J. London Math. Soc. **19**, 161—168; R **7**, 152. — ERDÖS, P. [1952]: On a Tauberian theorem for Euler summability. Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. **4**, 51—56; R **14**, 265; Z **47**, 301. — HARDY, G. H. [1949]: Divergent Series. Oxford. 396 S. R **11**, 25; Z **32**, 58. — HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD [1926]: A further note on the converse of Abel's theorem. Proceedings L. M. S. (2) **25**, 219—236; F **52**, 220. — HARDY, G. H., and M. RIESZ [1915]: The general theory of Dirichlet's series. Cambridge. 78 S. F **45**, 387. — INGHAM, A. E. [1937]: On the high-indices theorem of Hardy and Littlewood. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) **8**, 1—7; F **63**, 173; Z **16**, 397. — KNOPP, K. [1926]: Über Polynomentwicklungen im Mittag-Lefflerschen Stern durch Anwendung der Eulerschen Reihentransformation. Acta Math. **47**, 313—335; F **52**, 290. — LEVINSON, N. [1938]: General gap Tauberian theorems. I. Proc. London math. Soc. (2) **44**, 289—306; F **64**, 179; Z **19**, 161. — [1940]: Gap and density theorems. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 26. New York. 246 S. F **66**, 332; R **2**, 180; Z **26**, 216. — LITTLEWOOD, J. E. [1910]: The converse of Abel's theorem on power series. Proc. London math. Soc. (2) **9**, 434—448; F **42**, 276. — LORENTZ, G. G. [1948]: Tauberian theorems and Tauberian conditions. Trans. Amer. Math. Soc. **63**, 226—234; R **9**, 425; Z **32**, 60. — MAZUR, S. [1930]: Eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren. I. Studia Math. **2**, 40—50; F **56**, 906. — MAZUR, S., and W. ORLICZ [1955]: On linear methods of summability. Studia Math. **14**, 129—160; R **16**, 814; Z **64**, 56. — MEYER-KÖNIG, W. [1939]: Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen. II. Math. Z. **45**, 479—494; F **65**, 242; R **1**, 51; Z **24**, 29. — [1949]: Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren. Math. Z. **52**, 257—304; R **11**, 242; Z **41**, 184. — [1953]: Bemerkung zu einem Lückenumkehrsatz von H. R. Pitt. Math. Z. **57**, 351—352; R **14**, 865; Z **50**, 68. — MEYER-KÖNIG, W., u. K. ZELLER [1953]: Über das Taylorsche

Summierungsverfahren. Math. Z. **60**, 348—352 (1954); R **16**, 28. — PITT, H. R. [1938₁]: General Tauberian theorems. Proc. London math. Soc. (2) **44**, 243—288; F **64**, 180; Z **19**, 109/466. — [1938₂]: Mercerian theorems. Proc. Cambridge philos. Soc. **34**, 510—520; F **64**, 182; Z **20**, 17. — WIENER, N. [1936]: A Tauberian gap theorem of Hardy and Littlewood. J. Chinese math. Soc. **1**, 15—22; F **62**, 1171; Z **15**, 209. — WILANSKY, A., and K. ZELLER [1955]: Summation of bounded divergent sequences, topological methods. Trans. Amer. Math. Soc. **78**, 501—509; R **16**, 690. — [1956]: Abschnittsbeschränkte Matrixtransformationen; starke Limitierbarkeit. Math. Z. **64**, 258—269. — WŁODARSKI, L. [1955]: Sur les méthodes continues de limitation. I, II. Studia Math. **14**, 161—187, 188—199; R **16**, 814; Z **64**, 57. — ZELLER, K. [1951]: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463—487; R **12**, 604; Z **45**, 334. — [1953₁]: Sur la méthode de sommation d'Abel. C. R. Acad. Sci. Paris **236**, 568—569; R **14**, 744. — [1953₂]: *FK*-Räume in der Funktionentheorie. I, II. Math. Z. **58**, 288—305, 414—435; R **14**, 1092; R **15**, 134; Z **51**, 86. — [1953₃]: Approximation in Wirkfeldern von Summierungsverfahren. Arch. Math. **4**, 425—431; R **15**, 618; Z **52**, 55. — [1956]: Über den perfekten Teil von Wirkfeldern. Math. Z. **64**, 123—130.

Stuttgart, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 4. Mai 1956)

Almost Convergence and two Matrix Limitation Methods

By

G. M. PETERSEN

In this note we want to consider two matrix limitation methods. The matrix $C = (c_{mn})$ is defined by the transformation $t_m = \frac{1}{2}(s_{2m} + s_{2m+1})$, $m = 0, 1, 2, \dots$, i.e. $c_{m,2m} = c_{m,2m+1} = \frac{1}{2}$, $c_{mn} = 0$ everywhere else. The matrix $B = (b_{mn})$ is defined by the transformation $t_m = \frac{1}{2}(s_{2m+1} + s_{2m+2})$, $m = 0, 1, 2, \dots$, i.e. $b_{m,2m+1} = b_{m,2m+2} = \frac{1}{2}$, $b_{mn} = 0$ elsewhere. The limitation methods C and B are consistent for bounded sequences as was shown by CASPER GOFFMAN and the author, [3]. We wish to show the relation of these methods to the method of Almost Convergence, LORENTZ, [2]. If $t_{n,p} = \frac{1}{p}(s_n + \dots + s_{n+p})$, then $\{s_n\}$ is Almost Convergent if $\lim_{p \rightarrow \infty} t_{n,p} = s$ holds uniformly in n . A necessary and sufficient condition that a regular method includes Almost Convergence is that $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn} - a_{m,n+1}| = 0$, such a method is said to be Strongly Regular.

It has been shown by LORENTZ [2] that for any sequence of methods $\{A_k\}$ $k = 0, 1, 2, \dots$ containing Almost Convergence, there is a bounded non-Almost convergent sequence that is limited by all the members of $\{A_k\}$. On the other hand, if every member of a set of methods $\{A_k\}$ $k = 0, 1, 2, \dots$ is contained by Almost Convergence (i.e. if the bounded sequences of each A_k are all almost convergent) then there is an Almost Convergent sequence not limited by any member of $\{A_k\}$.

We shall prove the following

Theorem 1. A necessary and sufficient condition that a sequence be Almost Convergent is that it be the sum of a bounded B -limitable and a bounded C -limitable sequence. That is the vector spaces of the B and C limitable sequences span the space of Almost Convergent sequences.

Proof. If a sequence $\{s_n\}$ is C limitable to 0, then $s_{2n} + s_{2n+1} = o(1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Any regular method $A = (a_{mk})$ that limits all bounded sequences that are C limitable to 0 has

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{mk} s_k = a_{m0} s_0 - a_{m1} s_0 + a_{m2} s_2 - a_{m3} s_2 + \dots + a_{m2k} s_{2k} - \\ - a_{m2k+1} s_{2k} + \dots + \sum a_{mk} \sigma_k,$$

where $\{\sigma_k\}$ converges to 0. Since any method limiting all bounded C limitable sequences is consistent with C , BRUDNO [I], this implies

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum (a_{m,2k} - a_{m,2k+1}) s_{2k} = 0, \quad \text{where } \{s_{2k}\}$$

can be any bounded sequence. A necessary and sufficient condition for this has been given by SCHUR [5]; and for the above transformation

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum |a_{m,2k} - a_{m,2k+1}| = 0.$$

A similar argument shows that for any matrix limiting all B limitable sequences,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum |a_{m,2k+1} - a_{m,2k+2}| = 0,$$

so that a necessary and sufficient condition that a matrix $A = (a_{mn})$ limit all bounded B and C limitable sequences is

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum |a_{mn} - a_{m,n+1}| = 0.$$

Hence a matrix limits all B and C limitable sequences if and only if it is strongly regular. However, it has been shown by the author [4] that a necessary and sufficient condition for a sequence to be Almost Convergent is that it be limited by all strongly regular methods. This completes our proof.

The methods B and C are not consistent for certain unbounded sequences that are $O(n)$. However, if the rows of B and C are intertwined with the rows of the CESARO matrix, for example, this difficulty may be removed. In [3] CASPER GOFFMAN and the author found a set of consistent limitation methods, such that any bounded sequence was limited by at least one member of the set and to the values $\frac{1}{2}(U+L)$ where $U = \limsup s_n$ and $L = \liminf s_n$. These matrices are all consistent with B and C . It is clear that the member of this set that limits $1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots$ to $\frac{1}{2}$ and B and C form a triplet of methods such that no method can contain all three, any method containing B and C is strongly regular and so would be inconsistent with the other, hence, by a theorem of BRUDNO [I], no method could contain the triplet. No pair of consistent methods which can not be contained by a third method seems to be known.

§ 2

In this section we wish to treat C from a different point of view, and shall consider both the bounded and unbounded C limitable sequences. By an infinite rowed matrix we shall mean a matrix which has an infinite number of rows, each of which has an infinite number of non-zero elements.

We shall now prove

Theorem 2. No infinite rowed matrix can be equivalent to or stronger than C .

Proof. In the first place we can suppose that each row has an infinite number of non zero elements as by removing those rows without this property

we would only define a new matrix that was stronger than the previous one. Again s_n is C limitable to zero if $s_{2m} = -s_{2m+1}$, $m=0, 1, 2, \dots$. First we shall suppose that all the rows in the matrix have an infinite number of non-zero elements of the form $a_{m,2k}$, i.e. with an even index. In fact, let $k=m_\nu$, $\nu=0, 1, 2, \dots$ define the set where $a_{m,2k}$ is non zero, and such that

$$1_1 < 1_2 < 2_1 < \dots < 1_r < 2_{r-1} < \dots < r_1 < \dots.$$

Since the choice of s_{2k} is quite arbitrary, we can always choose our sequence so that

$$\sum_{k=0}^{2m_\nu} a_{mk} s_k = m + \nu$$

for all m and ν , by choosing $s_{2 \cdot 1_1}, s_{2 \cdot 1_2}, s_{2 \cdot 2_1}, \dots, s_{2 \cdot 1_r}, \dots, s_{2 \cdot r_1}, \dots$ in succession and $s_{2k} = 0$ when k is not of the set $\{m_\nu\}$. If some rows do not have an infinite number of non-zero even elements, they can be removed. If there are only a finite number of rows with even non-zero elements, a construction similar to the above is possible, though the choice of s_{2n} now depends on that of s_{2n+1} .

This last theorem has an application to the iteration of matrices. If $t_m = \frac{1}{2}(s_{2m} + s_{2m-1})$, and $A = (a_{mn})$ is regular, then it is always true that $\tau_m = \sum a_{mn} t_n$ is stronger than C . However, $\tau'_m = \frac{1}{2}a_{m0}s_0 + \frac{1}{2}a_{m1}s_1 + \dots + \frac{1}{2}a_{mk}s_{2k} + \frac{1}{2}a_{mk}s_{2k+1} + \dots$ may not be so.

References

- [1] BRUDNO, A.: Summation of Bounded Sequences by Matrices (in Russian). Recueil Math. (Mat. Sbornik), N. S. **16**, 191—247 (1945). — [2] LORENTZ, G. G.: A Contribution to the Theory of Divergent Sequences. Acta Math. **80**, 167—190 (1948). — [3] GOFFMAN, CASPER, and G. M. PETERSEN: Consistent Limitation Methods. Proc. Amer. Math. Soc. **1956**, 367—369. — [4] PETERSEN, G. M.: Almost Convergence and Well Distributed Sequences. Quart. J. Math. (Oxford) (to appear). — [5] SCHUR, I.: Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J. reine u. angew. Math. **151**, 79—111 (1924). — [6] ZELLER, K.: Abschnittskonvergenz in FK -Räumen. Math. Z. **55**, 55—70 (1951).

University College of Swansea, Singleton Park, Swansea (Großbritannien)

(Eingegangen am 19. Mai 1956)

Über die Kettenbruchentwicklung quadratischer Irrationalzahlen

Von

BOŽIDAR DJERASIMOVIĆ

I. Das Ziel

1. Das Studium der Kettenbruchentwicklung quadratischer Irrationalzahlen, besonders der Eigenschaften binärer quadratischer Formen, wird erleichtert durch Einführung einer neuen Operation mit geordneten Komplexen von natürlichen Zahlen.

Das Ziel dieser Abhandlung ist, diese neue Operation in Weiterführung der Arbeit DJERASIMOVIĆ [1] zu definieren, ihre Eigenschaften zu untersuchen und mittels derselben gewisse neue Eigenschaften der Kettenbruchentwicklung quadratischer Irrationalzahlen zu zeigen. Die Definition der neuen Operation verlangt die Erweiterung von gewissen bekannten Begriffen und das wird zuerst gezeigt.

II. Geordnete Komplexe ganzer Zahlen

2. In dieser Abhandlung werden wir auch mit geordneten Komplexen ganzer Zahlen operieren, deren Glieder irgendwelche ganze Zahlen sind, z.B.: 2, 3, -1, 1, -5, 0 oder -1, -2, 0, 5, -3. Zum Unterschied von diesen Komplexen werden wir unter der Bezeichnung *Geordnete Komplexe von natürlichen Zahlen* diejenigen geordneten Komplexe verstehen, deren *erstes* und *letztes* Glied *ganze*, doch die übrigen *natürliche* Zahlen sind, z.B.: -2, 3, 5, 2, 1, 1 oder 0, 5, 3, 1, -3.

Als Folge der Einführung geordneter Komplexe ganzer Zahlen finden folgende Erweiterungen statt:

a) *Die Erweiterung des Operationsbegriffs „Änderung der geraden Gliederzahl in die ungerade und umgekehrt“* (DJ. [1], § 3). Die Definition dieser Operation kann man jetzt, unabhängig von der Größe des ersten oder letzten Gliedes, durch die folgenden Gleichungen ausdrücken:

$$(1) \quad *A = 1, a_1 - 1, 'A; \quad A* = A', a_m - 1, 1,$$

wo $A = a_1 a_2 \dots a_m$ ein geordneter Komplex ganzer Zahlen ist, z.B.:

$$*1 = 1, 0 \quad 0* = -1, 1; \quad *\{-5\} = 1, -6.$$

Die Gleichwertigkeit dieser Definition mit der früher gegebenen wird etwas später gezeigt.

b) *Die Erweiterung des EULERSchen Funktionsbegriffs* [A]. Den Ausdruck [A] wo $A = a_1 a_2 \dots a_m$ ein geordneter Komplex ganzer Zahlen ist, definieren

wir mit Hilfe der Rekursionsformel

$$[A] = a_1[A'] + [A''] \quad \text{mit} \quad [V] = 1, [V'] = 0.$$

Wenn A ein geordneter Komplex ist, dessen sämtliche Glieder natürliche Zahlen sind, dann stimmt diese Definition mit der bekannten Definition

$$(A) = \frac{[A]}{[A']}$$

überein.

Aus der neuen Definition ergeben sich alle die bekannten Eigenschaften der Funktion $[A]$ ausgedrückt durch die Formeln (2), (4), (6), (8), (9), (10), (14) und (15) in der schon erwähnten Abhandlung (DJ. [I]). Wir halten es nicht für nötig, das hier zu beweisen.

3. Die Operation mit geordneten Komplexen ganzer Zahlen erfordert die Einführung der Begriffe *gleicher* und *äquivalenter* Komplexe.

Definition 1. a) Zwei geordnete Komplexe ganzer Zahlen A und B sind *einander gleich*,

$$A = B,$$

wenn die Glieder des einen Komplexes der Reihe nach gleich den entsprechenden Gliedern des zweiten Komplexes sind.

b) Zwei geordnete Komplexe ganzer Zahlen A und B sind *zueinander äquivalent*,

$$A \sim B,$$

wenn sie die Gleichungen

$$(2) \quad [A] = \varepsilon[B], \quad [A'] = \varepsilon[B'], \quad [A''] = \varepsilon[B''], \quad [A'''] = \varepsilon[B''']$$

befriedigen, wo $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ in allen vier Gleichungen der gleiche Wert ist.

Zum Beispiel: $3, -3, 1, 5 \sim 2, 1, 1, 6$ mit $\varepsilon = -1$.

Aus dieser Definition, auf Grund der Gleichung

$$[K][K'] - [K'] [K''] = (-1)^k,$$

wo K irgendein geordneter Komplex ganzer Zahlen mit k Gliedern ist, folgt: Die Summe der Gliederzahlen zweier äquivalenter Komplexe ist eine gerade Zahl.

Für die zueinander äquivalenten geordneten Komplexe ganzer Zahlen gelten die folgenden zwei Sätze:

Satz 1. Zwei äquivalente geordnete Komplexe von natürlichen Zahlen sind auch gleich.

Beweis. Wenn A und B geordnete Komplexe von natürlichen Zahlen sind, dann sind alle Glieder der Komplexe $A', B', \underline{A'}$ und $\underline{B'}$, außer vielleicht der ersten, natürliche Zahlen, und aus $A \sim B$ folgen, auf Grund der Bedingung (2), die Gleichungen

$$(A') = (B'), \quad (\underline{A'}) = (\underline{B'}),$$

was mit

$$A' = B', \quad \underline{A'} = \underline{B'}$$

gleichbedeutend ist, weil die Gliederzahlen der Komplexe A' und B' beide gerade oder ungerade sind. Aus den letzten zwei Gleichungen folgt auch die Gleichung $A = B$.

Satz 2. *Aus der Äquivalenz zweier geordneter Komplexe ganzer Zahlen*

$$A \sim B$$

folgen auch die Äquivalenzen

$$(3) \quad \underline{A} \sim \underline{B}, \quad A^* \sim B^*, \quad {}^*A \sim {}^*B, \quad KAL \sim KBL,$$

wo K und L geordnete Komplexe ganzer Zahlen sind.

Beweis. Die erste der Äquivalenzen (3) folgt unmittelbar aus der Bedingung (2), während die zweite und dritte mit Hilfe der Gleichungen

$$[P^*] = [P], \quad [{}^*P] = [P],$$

$$(4) \quad [P^*'] = [P] - [P'], \quad [{}^*P'] = [P] - [{}^*P']$$

bewiesen werden. Zum Beweis der letzten der Äquivalenzen (3) genügt es die Äquivalenz $KA \sim KB$ zu beweisen, welche die Folge der Bedingung (2) auf Grund der bekannten Rekursionsformel

$$(5) \quad [KA] = [K][A] + [K'] [{}^*A]$$

ist (Dj. [I], Formel (8)).

4. Zum Übergang von einem geordneten Komplex ganzer Zahlen auf irgendeinen ihm äquivalenten, genügen *die Äquivalenzen:*

$$(6) \quad A, 0, B \sim A', a_m + b_1, {}^*B,$$

$$(7) \quad A, \alpha, B \sim A^*, -\alpha - 2, {}^*B,$$

wo $A = a_1 a_2 \dots a_m$, $B = b_1 b_2 \dots b_n$ geordnete Komplexe ganzer Zahlen sind, während α eine ganze Zahl ist.

Durch die direkte Anwendung der Rekursionsformel (5) und der Formel (4) werden die Gleichungen

$$[P, 0, Q] = [P', p + q, {}^*Q],$$

$$[P, \alpha, Q] = -[P^*, -\alpha - 2, {}^*Q]$$

erhalten, wo p das letzte Glied des Komplexes P , während q das erste Glied des Komplexes Q ist. Diese Gleichungen sind befriedigt, wenn $P = A$, $Q = B$ oder $P = {}^*A$, $Q = B$ oder $P = A$, $Q = B'$ oder $P = {}^*A$, $Q = B'$ ist, falls $m \geq 1$, $n \geq 1$ ist, woraus nach den Bedingungen (2) die Äquivalenzen (6) und (7) folgen.

Nach Satz 1 kann in einer Menge zueinander äquivalenter geordneter Komplexe von ganzen Zahlen höchstens ein geordneter Komplex von natürlichen Zahlen bestehen. Wir werden beweisen, daß er auch fehlen kann.

Zusatz zu Satz 1. Der geordnete Komplex von natürlichen Zahlen A , der einem gegebenen geordneten Komplex von ganzen Zahlen B äquivalent ist,

besteht dann und nur dann, wenn entweder die Bedingung

$$a) \quad [{}'B'] \neq 0,$$

oder

$$b) \quad [{}'B'] = 0 \quad \text{mit} \quad [{}'B] = [B'] = \pm 1$$

befriedigt ist. Im Fall b) ist der Komplex A eingliedrig.

Beweis. Wenn A ein geordneter Komplex von natürlichen Zahlen ist und $[{}'A'] = 0$, so folgt $'A' = V'$, was bedeutet, daß der Komplex A eingliedrig ist. Aber dann ist auch $[{}'A] = [A'] = 1$. Umgekehrt, ist $[{}'A'] = \varepsilon [{}'B'] \neq 0$, dann sind die Komplexe A' , und $\underline{A}'$ nach den Bedingungen (2), durch die Brüche

$$(A') = \frac{[B']}{[{}'B']}, \quad (\underline{A}') = \frac{[{}'B]}{[{}'B']}$$

eindeutig bestimmt.

Zum Beispiel: Es besteht kein geordneter Komplex von natürlichen Zahlen, der dem Komplex $a, 1, -1, b$ äquivalent ist.

5. Aus der Äquivalenz (6) folgt die neue Interpretation des leeren Komplexes

$$(8) \quad V = 0, 0$$

weil nach (6)

$$A, 0, 0, B \sim AB$$

ist. Die Gleichheit (8) ist auch im Einklang mit den Werten

$$[V] = 1, [{}'V] = [V'] = 0, [{}''V] = [{}'V'] = [V''] = [V] = 1$$

(PERRON [2], § 9, Formel (6) und (7)).

So kann jetzt die Operation „Änderung der geraden Gliederzahl in die ungerade und umgekehrt“ auf den leeren Komplex V angewandt werden:

$$(8') \quad {}^*V = 1, -1, 0, \quad V^* = 0, -1, 1.$$

Die Äquivalenz (6) ermöglicht, die Identität der früher gegebenen Definition der Operation „Änderung der geraden Gliederzahl in die ungerade und umgekehrt“ mit der in dieser Abhandlung gegebenen Definition zu erweisen. Nach der alten Definition ist $\{a, 1\}^* = a + 1$, während nach der neuen $\{a, 1\}^* = a, 0, 1$ ist, woraus die Identität der beiden Definitionen offensichtlich, weil $a + 1 \sim a, 0, 1$ ist.

III. Die Operation „|“

6. Definition 2. Der Ausdruck $A|B$, wo

$$A = a_1 a_2 \dots a_m, \quad B = b_1 b_2 \dots b_n \quad (m \geq 0 \text{ endlich, } n \geq 0)$$

geordnete Komplexe ganzer Zahlen sind, ist ebenfalls ein geordneter Komplex ganzer Zahlen, und zwar:

$$A|B = A, -1, {}^*B.$$

Die so definierte Operation werden wir Operation „|“ nennen und ihre verschiedenartigen und nützlichen Eigenschaften im folgenden zeigen.

7. Vor allem befriedigt der Komplex $A|B$ die Gleichung

$$(9) \quad [A|B] = [A'] [B] - [A] ['B].$$

Den Ausdruck $[A|B]$ können wir nämlich in der Form

$$[A|B] = [A, -1, *B] = [A, -1] [*B] + [A] [*B]$$

schreiben, aus welcher, auf Grund der zweiten Gl. (4), die Gl. (9) folgt.

8. Die Operation „|“ gestattet eine „Kürzung“ von *gleichen* Gliedern, wenn dieselben getrennt durch das „|“ unmittelbar neben ihm stehen. Das besagen die Formeln:

$$(10) \quad AK|\underline{KB} \sim A|B,$$

$$(11) \quad [AK|\underline{KB}] = (-1)^k [A|B],$$

wobei K irgendwelcher geordneter Komplex ganzer Zahlen und k seine Gliederzahl ist.

Beweis. Nach der Definition 2 und den Äquivalenzen (6) und (7) ist $Aa|aB = A, a, -1, 1, a-1, B \sim A, a, 0, -a-1, *B \sim A, -1, *B = A|B$, woraus die Äquivalenz (10) folgt. Mit der Anwendung der Formel (9) erhält man

$$\begin{aligned} [Aa|aB] &= [A] [aB] - [Aa] [B] = \\ &= [A] \{a[B] + ['B]\} - \{a[A] + [A']\} [B] = -[A|B], \end{aligned}$$

woraus die Gl. (11) folgt.

9. Für die Operation „|“ gilt:

Zusatz zu Satz 2. Aus der Äquivalenz zweier geordneter Komplexe ganzer Zahlen

$$A \sim B$$

folgen die Äquivalenzen

$$(12) \quad A|K \sim B|K, \quad K|A \sim K|B,$$

wobei K irgendein geordneter Komplex ganzer Zahlen ist.

Der Beweis folgt aus dem Satz 2, weil die Äquivalenzen (12) in der Form

$$A, -1, *K \sim B, -1, *K; \quad K, -1, *A \sim K, -1, *B$$

geschrieben werden können.

10. Für die Operation „|“ gilt nicht das Kommutativ-, wohl aber das Assoziativgesetz:

$$(13) \quad \{A|B\}|C = A|\{B|C\}.$$

In der Tat, nach der Definition 2 erhalten beide Seiten dieser Gleichung die gleiche Form:

$$A|B|C = A, -1, *B, -1, *C.$$

So ist z.B.:

$$(14) \quad A|V|B \sim AB,$$

weil nach (8), (6) und (7):

$$\begin{aligned} A|V|B &\sim A|0, 0|B = A, -1, 1, -1, 0, -1, *B \sim \\ &\sim A, -1, 1, -2, *B \sim A, 0, 0, B \sim AB \end{aligned}$$

ist.

11. Seien A, B und C geordnete Komplexe ganzer Zahlen, der Äquivalenz

$$(15) \quad A|B \sim C$$

genügend. Wir werden zeigen, daß aus einer solchen Äquivalenz jeder in ihr figurierende Komplex als Funktion der beiden übrigen bestimmt werden kann.

Tatsächlich, nach dem Zusatz zu Satz 2 folgt aus der Äquivalenz (15) die Äquivalenz

$$\underline{A}|A|B \sim \underline{A}|C|,$$

welche, nach (10), sich zurückführt auf die Form

$$V|V|B \sim \underline{A}|C|$$

und schließlich, nach (14), auf die Form

$$(15') \quad B \sim \underline{A}|C|$$

zurückgeführt werden kann. In derselben Weise folgt aus (15) auch die Äquivalenz

$$(15'') \quad A \sim C|\underline{B}|$$

wodurch unsere Behauptung bewiesen ist.

12. Früher haben wir den Sinn des Ausdrucks A^v definiert, wo v eine natürliche Zahl oder Null ist (DJ. [I], § 2) und jetzt ist uns die Möglichkeit gegeben, denselben Ausdruck auch für negative Werte der ganzen Zahl v zu definieren.

Definition 3. Der Ausdruck A^{-1} , wo A irgendein geordneter Komplex ganzer Zahlen ist, ist ebenfalls ein geordneter Komplex ganzer Zahlen, so daß

$$(16) \quad AA^{-1} \sim V$$

ist.

Bei dieser Gelegenheit haben wir den leeren Komplex V als ein Einheits-element in der Menge geordneter Komplexe ganzer Zahlen betrachtet, wofür wir genug Grund haben. Um die Existenz des Komplexes A^{-1} zu beweisen und einen expliziten Ausdruck für ihn zu erhalten, benützen wir den Zusatz zu Satz 2. Aus der Äquivalenz (16) folgt die Äquivalenz

$$V|\underline{A}|AA^{-1} \sim V|\underline{A}|V$$

deren linke Seite nach (10) und (14) die Form

$$V|V|A^{-1} \sim A^{-1}$$

erhält, so daß schließlich

$$(17) \quad A^{-1} = V|\underline{A}|V$$

ist. Demnach

$$(18) \quad A^{-\nu} = V|\underline{A}^{\nu}|V$$

wo ν eine natürliche Zahl ist. Wir bemerken, daß auch

$$A^{-1}A \sim V|\underline{A}|A \sim V|V|V \sim V$$

ist.

Zum Beispiel:

$$\{a\}^{-1} = V|a|V = -1, 1, a-1, -1, 1, -1, 0 \sim 0, -a, 0,$$

$$A^{-1} \sim -1, * \underline{A}^*, -1.$$

13. Für die Operation „|“, ausgeführt mit zwei geordneten Komplexen von natürlichen Zahlen gilt

Satz 3. Sind

$$\left. \begin{array}{l} A = a_1 a_2 \dots a_m, \\ B = b_1 b_2 \dots b_n \end{array} \right\} \text{ unter der Bedingung } \left\{ \begin{array}{l} a_m \neq b_1, \\ A|B \neq a|b \text{ mit } a \geq b, \end{array} \right.$$

irgendzwei geordnete Komplexe von natürlichen Zahlen, so besteht immer ein und nur ein geordneter Komplex von natürlichen Zahlen C , welcher zum Komplex $A|B$ äquivalent ist,

$$C \sim A|B,$$

und zwar

	$A B$	wobei	C
(19)	$a_1 B$	$a_1 \neq b_1, n \geq 2$	$a_1 - b_1 - 1, *'B$
(20)	$A b_1$	$a_m \neq b_1, m \geq 2$	$A'^*, b_1 - a_m - 1$
(21)	$A B$	$a_m > b_1$ $m \geq 2, n \geq 2$	$A', a_m - b_1 - 1, *'B$
(22)	$A B$	$a_m < b_1$ $m \geq 2, n \geq 2$	$A'^*, b_1 - a_m - 1, 'B$

Dabei ist

$$(23) \quad [A|B] = \varepsilon[C], \quad [{}'A|B] = \varepsilon[{}'C], \quad [A|B'] = \varepsilon[C'], \quad [{}'A|B'] = \varepsilon[{}'C']$$

und

$$\varepsilon = -1 \quad \text{bei} \quad m = 1, n \geq 2;$$

$$\varepsilon = +1 \quad \text{bei} \quad m \geq 2, n = 1;$$

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(b_1 - a_m) \quad \text{bei} \quad m \geq 2, n \geq 2.$$

Beweis. Aus der Definition 2 folgt durch Anwendung der Äquivalenzen (6) und (7)

$$A|B = A, -1, *B \sim A'^*, -a_m - 2, 1, -2, *B \sim \\ \sim A'^*, -a_m - 1, 0, B \sim A'^*, b_1 - a_m - 1, 'B$$

und das ist die Form (22) des Komplexes C . Für $B = b_1$ folgt daraus auch die Form (20). Ferner ist, nach (7):

$$A'^*, b_1 - a_m - 1, 'B \sim A', a_m - b_1 - 1, *'B,$$

woraus die Formen (21) und (19) des Komplexes C folgen. Nach Zusatz zu Satz 1 kann die Existenz des Komplexes C ausbleiben, nur wenn

$$[A|B'] = 0, \quad \text{d.h.} \quad (B') = (\underline{A'})$$

ist, woraus

$$B' = \underline{A'} \quad \text{oder} \quad B' = \underline{A'}^*$$

folgt. Aber im zweiten dieser beiden Fälle ist auch $[A|B] = [A|B'] = \pm 1$ und auf Grund der Bedingung $a_m \neq b_1$, besteht der geordnete Komplex von natürlichen Zahlen C dann und nur dann nicht, wenn

$$A|B = a|b \quad \text{mit} \quad a \geq b.$$

Daß C der einzige dem Komplex $A|B$ äquivalente geordnete Komplex von natürlichen Zahlen ist, folgt unmittelbar aus Satz 1.

Die Formeln (23) folgen auf Grund von (2) und (8), wenn man bedenkt, daß

$$A|B = A, -1, *B \sim A^*, -1, B \sim C$$

ist. Den Wert von ε erhält man durch Vergleich mit der Formel (9).

Bemerkung 1. Zu den Komplexen $A|V$ (für $m \geq 1$) und $V|B$ (für $n \geq 1$) bestimmen wir den äquivalenten Komplex C mit Hilfe der Formeln (19) bis (22), $V=0, 0$ setzend.

Bemerkung 2. Die Formeln (19) bis (22) sind für die Bestimmung des Komplexes C nicht unbedingt nötig, da man in jedem einzelnen Fall durch die Anwendung der Äquivalenzen (6) und (7) von $A|B$ zu C übergehen kann

IV. Anwendung auf die periodischen regelmäßigen Kettenbrüche

14. Wir betrachten die Kettenbruchentwicklung von zwei zueinander konjugierten quadratischen Irrationalzahlen

$$(24) \quad \xi = (B\bar{A}), \quad \eta = (C\bar{A}),$$

wobei

$$\left. \begin{array}{l} A = a_1 a_2 \dots a_m \\ B = b_1 b_2 \dots b_n \\ C = c_1 c_2 \dots c_p \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 \text{ und } c_1 \text{ ganze Zahlen, alle übrigen } b_v, \\ c_v \text{ und alle } a_v \text{ natürliche Zahlen} \end{array} \right.$$

sind. Der Komplex A braucht dabei nicht die primitive Periode, und die Komplexe B und C ebenso nicht kürzestmögliche Vorperioden darzustellen, d. h. die letzteren müssen nicht die Bedingungen $b_n \neq a_m$ und $c_p \neq a_1$ befriedigen. Im allgemeinen ist es gar nicht möglich, daß beide diese Bedingungen gleichzeitig befriedigen, falls ξ und η die Formen (24) haben.

Zwischen den so definierten Komplexen A , B und C besteht ein bestimmter Zusammenhang, worüber der folgende Satz Aufschluß gibt:

Satz 4. *Die Vorperioden B und C der Kettenbruchentwicklung von zwei zueinander konjugierten quadratischen Irrationalzahlen*

$$\xi = (B\bar{A}) \quad \text{und} \quad \eta = (C\bar{A})$$

und die Periode A des ersteren befriedigen die Äquivalenz

$$(25) \quad A \sim \underline{C} | B,$$

aus welcher auch die Äquivalenzen

$$(25') \quad B \sim C | A,$$

$$(25'') \quad C \sim B | \underline{A}$$

folgen.

Beweis. Wenn im Ausdruck

$$(C\bar{A}) = \frac{[C](\bar{A}) + [C']}{[C](\bar{A}) + [C']}$$

die quadratische Irrationalzahl $(\bar{A})$ durch die zu ihr konjugierte Zahl $-(0\bar{A})$ ersetzt wird, dann wird $(C\bar{A})$ in

$$(B\bar{A}) = \frac{[B](\bar{A}) + [B']}{[B](\bar{A}) + [B']}$$

transformiert und es folgt die Gleichung

$$\frac{[B](\bar{A}) + [B']}{[B](\bar{A}) + [B']} = \frac{[C] - [C'](\bar{A})}{[C] - [C'](\bar{A})},$$

d. h.

$$[\underline{C} | B](\bar{A})^2 - \{[\underline{C} | B] - [\underline{C} | B']\}(\bar{A}) - [\underline{C} | B'] = 0.$$

Nach Satz 3 besteht ein und nur ein geordneter Komplex von natürlichen Zahlen L , welcher äquivalent dem Komplex $\underline{C} | B$, ist:

$$L \sim \underline{C} | B.$$

So erhält nach (23) die vorherige Gleichung die Form

$$[L](\bar{A})^2 - \{[L] - [L']\}(\bar{A}) - [L'] = 0$$

was

$$(\bar{A}) = (\bar{L})$$

bedeutet, und wir können

$$A = L$$

setzen, wobei A nicht die primitive Periode darzustellen braucht. Dadurch ist die Äquivalenz (25) bewiesen. Die übrigen zwei folgen aus ihr nach Zusage zu Satz 2.

Wenn A die primitive Periode und $b_m \neq a_m$ ist, dann stellt der aus der Äquivalenz (25'') gewonnene Komplex C die kürzeste Vorperiode dar, falls ξ und η die Formen (24) haben. Es kann vorkommen, daß der so entstandene Komplex C kein geordneter Komplex von natürlichen Zahlen, oder aber daß $c_p \leq 0$ ist. In diesem Falle soll A^2 oder A^3 statt A verwendet werden. Zum Beispiel: Ist $\xi = (1, \bar{3})$, so ist

$$B|\underline{A} = 1|3 \sim -3, 1, -1, 0,$$

$$B|\underline{A^2} = 1|3, 3 \sim -3, 1, 2$$

und $C = -3, 1, 2$.

Dieselbe Bemerkung ist auch für die Äquivalenz (25') gültig.

Betrachten wir auch die Äquivalenz (25). Es seien die geordneten Komplexe von natürlichen Zahlen $B = b_1 b_2 \dots b_n$, $C = c_1 c_2 \dots c_p$ ($b_n > 0$ für $n \geq 2$, $c_p > 0$ für $p \geq 2$) willkürlich gegeben. Es ist in diesem Falle ersichtlich, daß die regelmäßigen Kettenbrüche $\xi = (B\bar{A})$, $\eta = (C\bar{A})$ dann und nur dann bestehen, wenn ein geordneter Komplex A , dessen sämtliche Glieder natürliche Zahlen sind, und welcher dem Komplex $\underline{C}|B$ äquivalent ist, besteht. Es sei

$$b_1 = c_1, b_2 = c_2, \dots, b_k = c_k; \quad b_{k+1} > c_{k+1}, \quad (k \geq 0).$$

Auf Grund des obigen Satzes 3 und des Satzes 3 in Dj. [I], folgt im gegenwärtigen Falle, daß die gegebenen Komplexe B und C die folgenden Bedingungen befriedigen müssen:

- a) $n \geq 0, p \geq 2$ für $k = 0$,
 $n \geq k + 1, p \geq k + 2$ für $k \geq 1$;
- b) $c_1 = -1$ für $n = 0$,
 $b_{k+1} - c_{k+1} \geq 2$ für $n = k + 1$;
- c) $c_{k+2} \geq 2$ für $p = k + 2$.

Beispiel. Sei $B = -2, 3$, $C = -3, 5, 6$. Dann folgt aus der Äquivalenz (25)

$$A \sim 6, 5, -3|-2, 3$$

und nach (22)

$$A = 6, 4, 4.$$

Demnach ist

$$\xi = (-2, 3, \overline{6, 4, 4}), \quad \eta = (-3, 5, 6, \overline{4, 4, 6}).$$

15. Die Äquivalenz (25'') gibt die Möglichkeit, mit Hilfe der gegebenen Kettenbruchentwicklung $\xi = (B\bar{A})$ einer quadratischen Irrationalzahl die Kettenbruchentwicklung $\eta = (C\bar{A})$ der ihr konjugierten Zahl zu bestimmen. Demnach ersetzt diese Äquivalenz vollkommen den Satz 1 in unserer früheren Abhandlung (Dj. [I]). Dabei fällt die Bedingung $\xi > 1$ weg.

Die Äquivalenz (25'') ermöglicht auch die Ausführung des direkten Beweises von Satz 2 in der erwähnten früheren Abhandlung.

Sei $\xi = (B\bar{A})$ neben $b_n \neq a_m$ gegeben. Nach (25) können die Vorperioden B und C zweier zueinander konjugierten quadratischen Irrationalzahlen nicht gegenseitig gleich sein. Folglich ist

$$\operatorname{sgn}(\xi - \eta) = \operatorname{sgn}\{(B) - (C)\} = \operatorname{sgn}[\underline{C} | B],$$

d.h., nach (25) und (23),

$$\operatorname{sgn}(\xi - \eta) = \varepsilon \operatorname{sgn}[A | \underline{B} | B],$$

wobei $\varepsilon = -1$ für $n=0$, $\varepsilon = +1$ für $n=1$ und $\varepsilon = \operatorname{sgn}(b_n - a_m)$ für $n \geq 2$ ist. Ferner ist nach (11)

$$\operatorname{sgn}(\xi - \eta) = (-1)^n \varepsilon \operatorname{sgn}[A | V | V] = -(-1)^n \varepsilon,$$

woraus unmittelbar der erwähnte Satz 2 folgt. Auch hier, wie im Satz 3 der erwähnten Abhandlung, fällt die Bedingung $\xi > 1$ weg.

16. Seien ξ und η auch weiterhin zueinander konjugierte quadratische Irrationalzahlen, durch die Ausdrücke (24) gegeben. Dann sind sie Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(26) \quad \alpha \xi^2 + \beta \xi + \gamma = 0,$$

wobei

$$(27) \quad \begin{cases} \alpha = [BA'] [B] - [BA] [B'], \\ -\beta = [BA'] [B] - [BA] [B'] + [BA'] [B] - [BA] [B'], \\ \gamma = [BA'] [B] - [BA] [B'] \end{cases}$$

ist (PERRON [2], § 19, Formeln (6)). Auf Grund der Gl. (9) erhalten diese Koeffizienten die Form

$$(28) \quad \alpha = [BA | \underline{B}], \quad -\beta = [BA | \underline{B}'] + [BA | \underline{B}], \quad \gamma = [BA | \underline{B}].$$

Da nach der Äquivalenz (25'')

$$A | \underline{B} \sim \underline{C} \quad \text{so ist} \quad BA | \underline{B} \sim B \underline{C},$$

und die Koeffizienten α, β und γ können nach (23) in der Form

$$(29) \quad \alpha = \varepsilon [B \underline{C}'], \quad -\beta = \varepsilon \{[B \underline{C}'] + [B \underline{C}]\}, \quad \gamma = \varepsilon [B \underline{C}]$$

geschrieben werden, wobei $\varepsilon = -1$ für $n=0$, $\varepsilon = +1$ für $n=1$ und $\varepsilon = \operatorname{sgn}(b_n - a_m)$ für $n \geq 2$ ist.

So erhält die quadratische Gl. (26) schließlich die Form

$$(30) \quad [B \underline{C}'] \xi^2 - \{[B \underline{C}'] + [B \underline{C}]\} \xi + [B \underline{C}] = 0.$$

Wir bemerken, daß die Gleichung

$$(31) \quad [BA^{v-1} \underline{C}'] \xi^2 - \{[BA^{v-1} \underline{C}'] + [BA^{v-1} \underline{C}]\} \xi + [BA^{v-1} \underline{C}] = 0,$$

wo v irgendwelche ganze Zahl verschieden von Null ist, äquivalent der Gl. (30) ist. Um die Gl. (31) zu erhalten, genügt es in der Formel (28) B durch BA^{v-1} und A durch A^v zu ersetzen. Aus der Gl. (31) erhält man die Gl. (30) für $v=1$ oder $v=-1$.

Beispiel. Sei die Zahl $\xi = (1, 2, \overline{2, 3, 1, 1})$ gegeben. Nach (25'') und (21) ist

$$C \sim 1, 2 | 1, 1, 3, 2 \sim 5, 2 \quad \text{d.h.} \quad C = 5, 2.$$

Wir bilden den Komplex

$$BC = 1, 2, 2, 5,$$

so daß nach (30) die gegebene Zahl ξ Wurzel der Gleichung

$$5\xi^2 - 34\xi + 38 = 0$$

ist, also

$$\xi = \frac{17 - \sqrt{99}}{5}, \quad \eta = \frac{17 + \sqrt{99}}{5},$$

weil $\xi < \eta = (5, 2, \overline{1, 1, 3, 2})$.

Literatur

[1] DJERASIMOVIĆ, B.: Beitrag zur Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche. Math. Z. **62**, 320—329 (1955). — [2] PERRON, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Stuttgart: B. G. Teubner 1954.

Mathematisches Institut der Universität Belgrad (Jugoslawien)

(Eingegangen am 11. Juni 1956)

On a result of B. H. Neumann

Von

W. R. SCOTT

B. H. NEUMANN [1, 13.1, 13.2 and (1.1)] has recently proved the following

Theorem. If G is a group such that for every subgroup H the conjugate class of H is finite, then for all H , H is of finite index in some normal subgroup of G .

As his proof is somewhat lengthy, it seems desirable to have a direct proof. A short proof is given below.

Let $N(H)$ denote the normalizer of H , $C(x)$ the centralizer of x , and $[G:H]$ the index of H in G .

Proof of theorem. Let H be a subgroup of G , and $H_1, \dots, H_n$ its conjugates. There is an $x_i \in G$ such that $H_i = x_i^{-1} H x_i$. It follows easily from the assumption on G that the conjugate class of x_i is finite. Hence $[H:H \cap C(x_i)]$ is finite, and since $H \cap C(x_i) < H_i$, $[H:H \cap H_i]$ is finite. If $N = \cap H_i$, then $[H:N]$ is finite, and N is normal in G . Thus H/N is a finite subgroup of G/N and has only a finite number of conjugates. Therefore its normal closure K/N is finite. Hence K is a normal subgroup of G containing H as a subgroup of finite index.

Bibliography

[1] NEUMANN, B. H.: Groups with finite classes of conjugate subgroups. *Math. Z.* **63**, 76—96 (1955).

University of Kansas, and Institute for Advanced Study

(Eingegangen am 11. Juni 1956)

Über Partitionenprobleme in Verbindung mit Potenzresten nach einem Primzahlmodul

Von

HANS PETERSSON

Einleitung

Im folgenden handelt es sich um eine Anwendung der elliptischen Modulfunktionen auf einen Problembereich der additiven Zahlentheorie vom Partitionentypus. Dem vorliegenden Text gehen zwei Arbeiten voran, in denen bereits Probleme dieser Art mit den Methoden der Modulfunktionen angegriffen wurden ([1], [2] des Literaturverzeichnisses am Schluß der Einleitung, im folgenden zitiert mit (PI) bzw. (PII)). Die Resultate von (PI) betreffen die Grundlagen des Verfahrens und dessen Anwendung auf ein sehr allgemeines Partitionenproblem, von dem mehrere Sonderfälle einer ersten Diskussion unterzogen werden. Einer dieser Fälle, ein nur drei Parameter enthaltendes Problem, wird mit dem gleichen Verfahren in (PII) sehr viel eingehender behandelt. Durch eine wesentliche Ausgestaltung der Methoden gelangt man einerseits zu erheblich schärferen Ergebnissen als in (PI), andererseits zu neuen einfachen und größtenteils unerwarteten Zusammenhängen arithmetischer und arithmetisch-analytischer Natur. Dieser Prozeß der Intensivierung wird hier fortgesetzt.

Gegenstand von (PII) sind im einfachsten Falle Partitionen, deren Summanden entweder sämtlich quadratische Reste oder sämtlich quadratische Nichtreste nach einem gegebenen Primzahlmodul q sind, wo $q \equiv 1 \pmod{4}$, $q > 5$. In der vorliegenden Arbeit handelt es sich — ich zitiere wieder den einfachsten Fall — um Partitionen, deren Summanden einer festen der l Klassen nach der Gruppe der l -ten Potenzreste $\pmod{q}$ angehören; dabei sind l und q gemäß $l \geq 2$, $q \equiv 1 \pmod{2l}$, $q > 2l + 1$ fest gegeben.

§ 1 gibt die genaue Definition der zu untersuchenden Partitionenanzahlen, die Bildung der zugehörigen erzeugenden Fourier-Reihen und — nach Anbringung einer Anfangsphase — die Bestimmung ihres Transformationsverhaltens bei Ausübung der Modulusubstitutionen einer gewissen Kongruenzgruppe der Stufe q . Das Hauptgewicht liegt auf der expliziten Darstellung der dabei auftretenden Multiplikatoren in einer besonders einfachen Gestalt; da hier l -te Potenzreste im Rationalen betrachtet werden, war diese Einfachheit für $l > 2$ von vornherein unwahrscheinlich.

In § 2 werden die erwähnten Kongruenzgruppen zunächst im Hinblick auf ihre Bedeutung für das vorliegende Problem untersucht. Darüber hinaus zeigt sich, daß die — für das Folgende nicht erforderliche — Bestimmung ihres Geschlechts nur geringen Aufwandes bedarf.

§ 3 enthält den vollen Transformations-Formalismus der erzeugenden Modulfunktionen des gestellten Partitionenproblems bei Ausübung beliebiger Modulusubstitutionen. Der Formalismus drückt aus, daß sich hierbei ein explizit gegebenes System multiplikativer Modulfunktionen unter Aufnahme konstanter Faktoren lediglich permutiert. Für die Faktoren (die Analoga der erwähnten Multiplikatoren) finden sich im Falle $l=2$ explizite Ausdrücke sehr einfacher Bauart [s. auch (PII)], während für $l>2$ hier die arithmetische Unzulänglichkeit der notwendigerweise im Rationalen verlaufenden Operationen hervortritt: Es gelingt nur, die sämtlichen auftretenden Symbole durch einfache Relationen auf $l-2$ oder $l-1$ von ihnen zurückzuführen, je nachdem, ob l gerade oder ungerade ist.

§ 4 bringt die Hauptergebnisse über die Partitionenanzahlen in Gestalt exakter Reihendarstellungen und asymptotischer Entwicklungen. Zwar bestehen diese letzteren für jedes einzelne Problem aus nur einer festen Anzahl von Gliedern; doch sind diese Glieder durch explizite Berechnung dereingehenden Exponentialsummen vollständig bestimmt, und es wird die Genauigkeit der entsprechenden Resultate von (PI) weit übertroffen. Gegenwärtig besteht kaum Aussicht, asymptotische Entwicklungen zu gewinnen, deren Gliederzahl mit der betreffenden — hier ganzzahligen — Variablen ins Unendliche wächst. Was in der Partitionenliteratur so bezeichnet wird, verdient diese Bezeichnung nicht wirklich, weil die wichtigsten Bestandteile der Glieder, gewisse Exponentialsummen oder Linearkomposita von solchen, nicht entfernt genau genug bekannt sind, als daß man das asymptotische Verhalten jedes einzelnen Gliedes auch nur ungefähr bestimmen könnte. Man muß sich also begnügen entweder mit allgemeinen Aussagen wie (PI) Satz 9 bzw. (PII) Satz 18 oder mit Entwicklungen, die nur so weit gehen, wie man imstande ist, die in den Gliedern auftretenden Exponentialsummen in geschlossener Form zu summieren.

§ 5 betrifft hauptsächlich die asymptotischen Relationen zwischen den vorher diskutierten Partitionenanzahlen. Das hier für $l>2$ vorliegende Problem besteht in der Verallgemeinerung eines in (PII) für $l=2$ bewiesenen sehr merkwürdigen Zusammenhanges, den ich zum Verständnis der Situation kurz zitiere: Es sei $\pi_n^+(q)$ bzw. $\pi_n^-(q)$ die Anzahl der Partitionen der natürlichen Zahl n in durch q nicht teilbare Summanden, die sämtlich quadratische Reste bzw. Nichtreste mod q sind. Es bezeichne $\mathbf{P}$ den Körper der rationalen Zahlen, ε die Grundeinheit, h die Klassenzahl des Körpers $\mathbf{P}(\sqrt[q]{q})$, $a_5(q)$ die Anzahl der Darstellungen von q als Summe von fünf Quadraten (in der üblichen Zählung). Ferner sei

$$(0.1) \quad e_5^*(q) = \frac{1}{240} a_5(q), \text{ wenn } q \equiv 1 \pmod{8}, \text{ und } = \frac{1}{960} a_5(q), \text{ wenn } q \equiv 5 \pmod{8};$$

dieses $e_5^*(q)$ erweist sich als natürliche Zahl $\equiv \frac{1}{4}(q-1) \pmod{2}$. Dann gilt für $n \rightarrow \infty$

$$(0.2) \quad \frac{\pi_n^+(q)}{\pi_n^-(q)} = \varepsilon^h \left\{ 1 - c_0(q) \frac{e_5^*(q)}{\sqrt[n]{q}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \quad \text{mit} \quad c_0(q) = \frac{\pi}{6} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{q}}.$$

Als die Analoga der $\pi_n^-(q)$ hat man für $l > 2$ die Anzahlen $\pi_n^{(s)}(q)$ der Partitionen von n aufzufassen, deren Summanden in die durch den primen Rest $s \bmod q$ bestimmte Klasse nach der Gruppe $\mathfrak{P}$ der l -ten Potenzreste $\bmod q$ fallen. Vermöge der GALOISSchen Theorie ist $\mathfrak{P}$ eindeutig ein reeller absolut-abelscher Zahlkörper K in $P(\exp \frac{2\pi i}{q})$ zugeordnet. Es liegt nahe, $\pi_n^{(s)}(q)$, der Konjugiertenbildung in K entsprechend, als zu $\pi_n^{(1)}(q)$ konjugierte Anzahlfunktion zu betrachten und nun die logarithmierte Relation (0.2) dadurch zu verallgemeinern, daß man den Regulator der Konjugiertenquotienten von $\pi_n^{(1)}(q)$ aufstellt. Dieser Regulator erscheint auf der linken Seite der folgenden Gleichung, deren Gültigkeit aus § 4 hervorgeht: Durchlaufen s und t ein Vertretersystem der (eigentlichen) Nebenklassen nach der Gruppe $\mathfrak{P}$ in der gleichen Reihenfolge, so gilt für $n \rightarrow \infty$

$$(0.3) \quad \left| \log \frac{\pi_n^{(st^{-1})}(q)}{\pi_n^{(t^{-1})}(q)} \right|_{s \neq 1 \neq t} = Rh \left(1 + \frac{C_1(q)}{\sqrt[n]{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

wo R den Regulator der Grundeinheiten und h die Klassenzahl des Körpers K bezeichnet.

Die wesentliche Aufgabe des § 5 kann jetzt dahin präzisiert werden, daß für $C_1(q)$ eine Interpretation zu finden ist, analog derjenigen, welche sich für $l=2$ durch Logarithmieren von (0.2) ergibt, d.i.

$$C_1(q) = \frac{c_0(q) e_s^*(q)}{h \log \varepsilon} \quad (l-2).$$

Zur Lösung dieser Aufgabe wird man durch den inzwischen in [5] aufgedeckten Zusammenhang geführt: Man zerlege das Kreisteilungspolynom $f(u) = \sum_{v=0}^{q-1} u^v$ in zwei über $P(\sqrt[l]{q})$ irreduzible Faktoren $f_+(u), f_-(u)$ mit höchsten Koeffizienten 1 und schreibe diese Faktoren als Polynome in $u-1$; die Anordnung der Faktoren bestimmt sich in naheliegender Weise aus der transzendenten Normierung der q -ten Einheitswurzeln. In der Bezeichnung

$$f_{\pm}(u) = \sum_{m=0}^r \lambda_{m\pm} (u-1)^m \quad (r = \tfrac{1}{2}(q-1), \lambda_{r\pm} = 1)$$

sind die Koeffizienten $\lambda_{m\pm}$ ganze, paarweise konjugierte Zahlen aus $P(\sqrt[l]{q})$, und es gilt zunächst

$$\lambda_{0\pm} = f_{\pm}(1) = \sqrt[l]{q} \varepsilon^{\mp h};$$

ferner, wenn $\varrho_{m\pm} = \lambda_{m\pm} \lambda_{0\pm}^{-1}$ gesetzt wird:

$$\varrho_{2+} - \varrho_{2-} = \sqrt[l]{q} e_s^*(q).$$

Dementsprechend gewinnt man im Falle $l > 2$ eine Darstellung für $C_1(q)$, in die die folgenden Größen eingehen: Erstens die Logarithmen der Kreiseinheiten von K , wie sie in der Klassenzahlbestimmung auftreten, zweitens

die mit l -ten Potenzen im Exponenten gebildeten Analoga der GAUSSschen Summen zum Primzahlmodul q ; drittens die (den obigen $\varrho_{2\pm}$ entsprechenden) Quotienten der drittniedrigsten und der niedrigsten Koeffizienten der den obigen $f_{\pm}(u)$ entsprechenden Polynome in $u-1$. Man findet diese Polynome, indem man $f(u)$ in l über K irreduzible Faktoren mit höchstem Koeffizienten 1 zerlegt und die Faktoren als Polynome in $u-1$ schreibt. Formal ergibt sich $C_1(q)$ bis auf einen trivialen Faktor in Gestalt der Spur einer Matrix, die sich aus den drei (sinngemäß zu erklärenden) Regulatrizen der genannten Größensysteme zusammensetzt.

Literatur

[1] PETERSSON, HANS: Über Modulfunktionen und Partitionenprobleme. Abhandlungen d. Dtsch. Akad. d. Wiss. Berlin: Akademie-Verlag 1954. — [2] PETERSSON, HANS: Über die arithmetischen Eigenschaften eines Systems multiplikativer Modulfunktionen von Primzahlstufe. Acta mathematica **95**, (1956). — [3] HASSE, HELMUT: Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper. Berlin: Akademie-Verlag 1952. — [4] HECKE, ERICH: Über die L -Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper. Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen **1917**. — [5] PETERSSON, HANS: Über eine Zerlegung des Kreisteilungspolynoms von Primzahlordnung. Math. Nachrichten. Berlin **14** (1956).

§ 1. Ansatz. Die erzeugenden Fourier-Reihen

Fest gegeben seien die natürlichen Zahlen l und q unter den Bedingungen

$$(1.1) \quad l \geq 2; \quad q \text{ Primzahl, } q \equiv 1 \pmod{2l}, \quad q > 2l + 1.$$

Die meisten der im folgenden auftretenden Objekte hängen von l und q ab. Um die Symbolik zu entlasten, werden wir diese Abhängigkeit in der Bezeichnung vielfach nicht zum Ausdruck bringen.

Es bezeichne $\mathfrak{R}$ die multiplikative Gruppe der teilerfremden Restklassen mod q , $\mathfrak{P}$ die Untergruppe der l -ten Potenzen der Elemente von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{B}$ ein Vertretersystem der Nebenklassen von $\mathfrak{R}$ bezüglich $\mathfrak{P}$. Nach (1.1) besteht $\mathfrak{B}$ aus genau l Elementen und enthält $\mathfrak{P}$ die Restklasse von $-1 \pmod{q}$. Bedeutet $\{s\}$ allgemein die Restklasse der ganzen Zahl $s \pmod{q}$ ($(s, q) = 1$), so schreiben wir

$$(1.2) \quad s \in \mathfrak{P} \text{ für } \{s\} \in \mathfrak{P} \text{ und } r \in s \mathfrak{P} \text{ für } \{r\} \in s \mathfrak{P} \quad (r \text{ ganz, } (r, q) = 1),$$

ferner auch $s \in \mathfrak{B}$ an Stelle von $\{s\} \in \mathfrak{B}$; im letzteren Falle wird jeder Restklasse $\{s\}$ von $\mathfrak{B}$ eine ihrer Zahlen s eindeutig zugeordnet. Trägt ein Summen- oder Produktzeichen einen oberen Index — etwa s —, so besage dies die zusätzliche Bedingung $* \in s \mathfrak{P}$ für den laufenden Buchstaben $*$ und das betreffende s . Der Buchstabe h an einem Summen- oder Produktzeichen durchläuft, ohne daß dies nochmals hervorgehoben wird, die ganzen Zahlen von 1 bis $\frac{1}{2}(q-1)$, soweit sich dies mit eventuell gestellten anderen Bedingungen verträgt.

Jeder Nebenklasse $s\mathfrak{P}$ werde eine ganze Zahl $k_s \geq 0$ zugeordnet; wir erklären k_r für ganze zu q teilerfremde r durch

$$(1.3) \quad k_r = k_s, \quad \text{wenn} \quad r \in s\mathfrak{P},$$

k durch $k = \sum_{s \in \mathfrak{B}} k_s$ und setzen im folgenden stets $k > 0$ voraus. Wir untersuchen das folgende *Partitionenproblem*: Man denke sich die natürlichen Zahlen m aus $s\mathfrak{P}$ in k_s verschiedenen Farben realisiert und verstehe unter $\pi_n(\mathfrak{k}) = \pi_n(\mathfrak{k}, q, l)$ die Anzahl der Partitionen der natürlichen Zahl n in durch q nicht teilbare Summanden, wobei die Summanden aus $s\mathfrak{P}$ ($s \in \mathfrak{B}$) in den k_s vorbestimmten Farben erscheinen. Zwei solche Partitionen gelten als gleich, wenn in beiden die gleichen Summanden auftreten und wenn jeder Summand in beiden in jeder der für ihn vorbestimmten Farben gleich oft auftritt. Das Verschwinden eines k_s ($s \in \mathfrak{B}$) besage, daß überhaupt keine Summanden aus $s\mathfrak{P}$ verwendet werden. Die uneigentliche Partitionenanzahl $\pi_0(\mathfrak{k})$ setzen wir $= 1$; $\mathfrak{k}$ symbolisiert den Vektor mit den in irgendeiner fest gewählten Anordnung gebildeten Komponenten k_s ($s \in \mathfrak{B}$).

Um die *erzeugende Potenzreihe* der $\pi_n(\mathfrak{k})$ aufzustellen, setzen wir für ganzes r und komplexes u

$$\Phi_r(u) = \prod_{m=1}^{(r)} (1 - u^m) \quad (|u| < 1, (r, q) = 1).$$

Dann wird

$$(1.4) \quad \prod_{s \in \mathfrak{B}} \Phi_s^{k_s}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mathfrak{k}) u^n.$$

Von diesen Funktionen vollzieht sich der Übergang zu den *Modulfunktionen* in der komplexen Variablen $\tau = x + iy$ ($y = \text{Im } \tau > 0$) durch die Substitution $u = u_q = \exp 2\pi i \frac{\tau}{q}$. Man gelangt dabei zu den Teilwerten der WEIERSTRASSschen Funktion $\vartheta_1(v, \tau)$. Die Normierung und das Verhalten der Teilwerte bei Ausübung von Modulusubstitutionen wurden in (PI) 8., ihre Beziehungen zu dem obigen Partitionenproblem für $l=2$ in (PII) § 3 entwickelt. Wir beschränken uns hier darauf, die Hauptformeln des analytischen Apparats, auf den man durch die genannte Substitution geführt wird, anzugeben; sie sind wie im Falle $l=2$ unmittelbar aus (PII) Satz 6 abzuleiten.

Man setze

$$g_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad g_2(x') = g_2(x) \quad \text{für} \quad x' \equiv x \pmod{1},$$

ferner bei ganzem s

$$(1.5) \quad e_s = \sum_h^{(s)} h, \quad e'_s = \sum_h^{(s)} h^2, \quad \beta_s = \sum_h^{(s)} g_2\left(\frac{h}{q}\right) \quad ((s, q) = 1),$$

und bei ganzem $m \geq 1$

$$(1.6) \quad u_m = u_m(\tau) = \exp 2\pi i \frac{\tau}{m}, \quad \xi_m = u_m\left(\frac{1}{2}\right) = \exp \frac{\pi i}{m}.$$

Dann hängt

$$(1.7) \quad P_s(\tau) = \Phi_s(u_q(\tau)) = \prod_{m=1}^{\infty(s)} (1 - u_q^m)$$

mit der Modulfunktion [s. (PII), § 3]

$$(1.8) \quad Q_s(\tau) = \prod_h^{(s)} Q(\tau, h, 0, q) \quad ((s, q) = 1)$$

durch

$$(1.9) \quad Q_s(\tau) = i^{(q-1)/2l} \xi_q^{e_s} e^{\pi i \beta_s \tau} P_s(\tau)$$

zusammen. $Q_s(\tau)$ transformiert sich unter Anwendung der Moduls substitution $\tau \rightarrow S\tau$ gemäß

$$(1.10) \quad \begin{cases} Q_s(S\tau) = \mu_s(S) \hat{Q}_s(\tau, S), & \hat{Q}_s(\tau, S) = \prod_h^{(s)} Q(\tau, ah, bh, q), \\ \mu_s(S) = \lambda^{(q-1)/l}(S) \xi_q^{(1-a-b)e_s} \xi_{q^a}^{ab e'_s} & \left(S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right), \end{cases}$$

wo $\lambda(S)$ das Multiplikatorsystem der DEDEKINDSchen Modulform $\eta(\tau)$ bezeichnet [vgl. (PII) (1.20, 21)]. Versteht man unter Γ die Gruppe der Modulmatrizen, unter $\Gamma^* = \Gamma^*[l, q]$ die Gruppe der Matrizen $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ mit $\beta \equiv 0 \pmod{q}$, $\alpha \in \mathfrak{P}$, so folgt zunächst

Satz 1. Es gilt

$$Q_{s'}(\tau) = Q_s(\tau) \quad \text{für} \quad s' \in s\mathfrak{P} \quad ((s, q) = 1),$$

$$Q_s(L\tau) = v_s(L) Q_s(\tau) \quad \text{für} \quad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma^*$$

mit

$$v_s(L) = \lambda^{(q-1)/l}(L) \xi_q^{(1-\alpha-\beta)e_s} \xi_{q^a}^{\alpha\beta e'_s} \prod_h^{(s)} (-\xi_q^{2\alpha h})_{R_q(\alpha h) > \frac{1}{2}q}$$

und $R_q(t) = t - q[t/q]$ in der üblichen Bedeutung der eckigen Klammer.

Zur Vereinfachung des Ausdrucks $v_s(L)$ schreiben wir

$$v_s(L) = \lambda^{(q-1)/l}(L) \xi_q^{v_s(L)} (-1)^{\sigma_s(L)},$$

$$\psi_s(L) = (1 - \alpha - \beta) e_s + \alpha \frac{\beta}{q} e'_s + \sum_{\substack{h \\ R_q(\alpha h) > \frac{1}{2}q}}^{(s)} 2\alpha h, \quad \sigma_s(L) = \sum_{\substack{h \\ R_q(\alpha h) > \frac{1}{2}q}}^{(s)} 1$$

und erhalten zunächst

$$\alpha^{(q-1)/2l} \prod_h^{(s)} h = \prod_h^{(s)} (\alpha h) \equiv (-1)^{\sigma_s(L)} \prod_h^{(s)} h \pmod{q},$$

also

$$(-1)^{\sigma_s(L)} \equiv \alpha^{(q-1)/2l} \pmod{q}.$$

Wegen $\alpha \in \mathfrak{P}$ existiert ein ganzes q mit $\alpha \equiv q^l \pmod{q}$; daraus folgt

$$(1.11) \quad (-1)^{\sigma(L)} = \left(\frac{q}{q}\right) \quad (\text{quadratisches Restsymbol}).$$

Welche l -te Kongruenzwurzel q aus α man hier wählt, ist gleichgültig; ist μq eine andere, so gilt $\mu^l \equiv 1 \pmod{q}$ und nach (1.1)

$$\left(\frac{\mu}{q}\right) \equiv \mu^{(q-1)/2} = \mu^{l(q-1)/2l} \equiv 1 \pmod{q}.$$

Weiter setzen wir für ganzes, zu q teilerfremdes α

$$(1.12) \quad \gamma_s(\alpha) = \sum_{\substack{h \\ R_q(\alpha h) > \frac{1}{2}q}}^{(s)} h, \quad \gamma_s^*(\alpha) = \sum_{\substack{h \\ R_q(\alpha h) < \frac{1}{2}q}}^{(s)} h,$$

so daß nach (1.5) $\gamma_s(\alpha) + \gamma_s^*(\alpha) = e_s$. Für $\alpha \in \mathfrak{P}$ folgt nun

$$-\alpha \gamma_s(\alpha) + \alpha \gamma_s^*(\alpha) \equiv e_s \pmod{q}, \quad \text{also} \quad 2\alpha \gamma_s(\alpha) \equiv (\alpha - 1) e_s \pmod{q}$$

und daraus

$$\psi_s(L) \equiv \alpha \frac{\beta}{q} e'_s \pmod{q} \quad (L \in \Gamma^*).$$

Andrerseits hat man

$$2e'_s \equiv \sum_h^{(s)} h^2 + \sum_h^{(s)} (q-h)^2 = \sum_{j=1}^{q-1} j^2 \equiv s^2 \sum_{j=1}^{q-1} j^2 \pmod{q}$$

und mit g als Primitivzahl mod q :

$$(g^{2l} - 1) \sum_{j=1}^{q-1} j^2 \equiv (g^{2l} - 1) \sum_{0 \leq v \leq (q-1)/l-1} g^{2vl} = g^{2(q-1)} - 1 \equiv 0 \pmod{q}.$$

Wegen (1.1) gibt dies

$$(1.13) \quad e'_s \equiv 0 \pmod{q},$$

also insbesondere $\psi_s(L) \equiv 0 \pmod{q}$ für $(s, q) = 1$ und $L \in \Gamma^*$. Da überdies $e'_s \equiv e_s \pmod{2}$, wird

$$\psi_s(L) \equiv (1 - \alpha - \beta + \alpha\beta) e_s \equiv 0 \pmod{2},$$

und wir erhalten

Satz 2. Für $(s, q) = 1$ und $L \in \Gamma^*$ gestattet $v_s(L)$ die von s unabhängige Darstellung

$$v_s(L) = v(L) = \lambda^{(q-1)/l}(L) \left(\frac{\frac{1}{q}\alpha}{q}\right) \quad \left(L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right).$$

Dabei bedeutet $\left(\frac{\frac{1}{q}\alpha}{q}\right)$ das quadratische Restsymbol $\left(\frac{q}{q}\right) = (q/q)$ für irgendeine l -te Kongruenzwurzel q aus $\alpha \pmod{q}$. Der Exponent von $\lambda(L)$ ist gerade, und

es gilt für jede Modulmatrix $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\lambda^2(S) = \begin{pmatrix} i^{-c} & \\ & i^{d-1-c} \end{pmatrix} \exp \frac{\pi i}{6} \{ (a+d)c - bd(c^2-1) \}, \quad \text{wenn} \quad \begin{cases} c \equiv 1 \pmod{2} \\ d \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}.$$

$\lambda^2(S)$ stellt einen ungeraden Charakter auf der vollen Gruppe der Modulmatrizen dar.

Für $L \equiv \pm I \pmod{12q}$ ist $v(L) = 1$. Daß v einen geraden abelschen Charakter auf der Gruppe Γ^* darstellt, folgt aus Satz 1. Für das Restsymbol $(\sqrt[q]{-1}/q)$ bedeutet dies die Charaktereigenschaft auf Γ^* mit der Parität $(q-1)/2l$. Die Charaktereigenschaft läßt sich arithmetisch direkt bestätigen. Die genannte Parität, d.h.

$$(\sqrt[q]{-1}/q) = (-1)^{(q-1)/2l}$$

ergibt sich arithmetisch, wenn wieder g eine Primitivzahl mod q bezeichnet, aus

$$\sqrt[q]{-1} \equiv g^{(q-1)/2l} \pmod{q}, \quad (g/q) = -1.$$

§ 2. Die Gruppen $\Gamma^*[l, q]$

Wir bestimmen zunächst für die Gruppe Γ^* ein endliches Bereichssystem vom Charakter einer Fundamentalmenge, das aus *Spitzensektoren* von Γ^* besteht. Ist allgemein Γ_0 eine die Matrix $-I$ enthaltende Untergruppe von endlichem Index in Γ , ζ eine Spitze von Γ_0 , also $\zeta = A^{-1}\infty$ mit einem geeigneten $A \in \Gamma$, so heißt N die *Breite* der Spitze ζ von Γ_0 , wenn N die kleinste natürliche Zahl mit $A^{-1}U^N A \in \Gamma_0$ ist $\left(U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$; und jeder Bereich

$$(2.1) \quad \sum_{k=k_0+1}^{k_0+N} A^{-1}U^k \mathfrak{E} \quad \left(U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

wird ein *Spitzensektor* (mit der Spitze ζ) der Gruppe Γ_0 genannt. Dabei bezeichnet $\mathfrak{E}$ die Menge der τ mit $|\tau| > 1$, $|Re \tau| < \frac{1}{2}$ zuzüglich der Randpunkte τ mit $Re \tau \geq 0$ und des über die genannten τ zu erreichenden Grenzpunktes ∞ . Durchläuft $\zeta_j = A_j^{-1}\infty$ ($A_j \in \Gamma$, $1 \leq j \leq \sigma_0$) ein volles System inäquivalenter Spitzen von Γ_0 und hat ζ_j in Γ_0 die Breite N_j , so gewinnt man gleichzeitig in

$$(2.2a) \quad \Gamma = \sum_{j=1}^{\sigma_0} \sum_{k \bmod N_j} \Gamma_0 A_j^{-1} U^k$$

eine Zerlegung von Γ in paarweise elementfremde Nebenklassen bezüglich Γ_0 und in

$$(2.2b) \quad \mathfrak{F}_0 = \sum_{j=1}^{\sigma_0} \sum_{k \bmod N_j} A_j^{-1} U^k \mathfrak{E}$$

ein Bereichssystem der genannten Art für die Gruppe Γ_0 vorausgesetzt, daß hier alle k konsekutive Zahlen durchlaufen und daß getrennt liegende Randpunkte identifiziert werden, wenn sie einander nach Γ_0 äquivalent sind (was nur eintritt, wenn sie elliptische Fixpunkte von Γ , nicht aber von Γ_0 sind).

Im vorliegenden Falle $\Gamma_0 = \Gamma^*$ läßt sich dieses Schema wie folgt realisieren: Man denke sich die Zahlen s in den Restklassen von $\mathfrak{B}$ gemäß § 1 irgendwie fest gewählt und setze

$$(2.3) \quad \begin{cases} S_{1,s} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ für } s \in \mathfrak{B}, & S_{2,s} = T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } s \in \mathfrak{B} \\ S_{1,s} = \begin{pmatrix} s & \nu q \\ 1 & s' \end{pmatrix}, & S_{2,s} = \begin{pmatrix} q & -s' \\ s & -\nu \end{pmatrix} \text{ für } s \in \mathfrak{B}, s \notin \mathfrak{B}, \end{cases}$$

wo s' und ν zu s gemäß $ss' = \nu q + 1$ bestimmt seien. Durch elementare Rechnung bestätigt man den folgenden Sachverhalt:

Satz 3. Die Darstellungen (2.2a, b) gelten für $\Gamma_0 = \Gamma^*[l, q]$ mit $\sigma_0 = \sigma^* = 2l$ und

$$(2.4) \quad \begin{cases} \zeta_j = \infty \text{ bzw. } s & (A_j = S_{1,s}^{-1}, N_j = q, 1 \leq j \leq l, s \in \mathfrak{B}), \\ \zeta_j = 0 \text{ bzw. } q/s & (A_j = S_{2,s}^{-1}, N_j = 1, l+1 \leq j \leq 2l, s \in \mathfrak{B}). \end{cases}$$

Γ^* hat in der vollen Modulgruppe Γ den Index $l(q+1)$.

Auf dieser Grundlage läßt sich das Verhalten der Funktionen $Q_s(\tau)$ in den sämtlichen rationalen Spitzen der Modulfigur vollständig beschreiben.

Zur Entwicklung der Partitionenfunktionen $\pi_n(t)$ in unendliche Reihen bedarf man einer Aussage über die zweiten Zeilen $\{m_1, m_2\}$ in den Matrizen M der Nebenklassen $A_j \Gamma^*$ ($1 \leq j \leq \sigma^*$, A_j nach Satz 3). Für alle diese $\{m_1, m_2\}$ ist $(m_1, m_2) = 1$ eine notwendige Bedingung. Darüber hinaus kennzeichnen wir in der vierten Spalte der folgenden Tabelle die Menge der dabei tatsächlich auftretenden m_1 genau und geben in der fünften Spalte eine weitere notwendige Bedingung für die auftretenden m_2 an. Diese ist zusammen mit $(m_2, m_1) = 1$ auch hinreichend.

Tabelle

ζ_j	N_j	A_j	m_1	m_2
∞	q	I	Alle ganzen m_1	$m_2 \in \mathfrak{B}$
$s \in \mathfrak{B}, s \notin \mathfrak{B}$	q	$\pm S_{1,s}^{-1}$	Alle ganzen $m_1 \neq 0$	$m_2 \in s \mathfrak{B}$
$0 \text{ und } \frac{q}{s} \ (s \in \mathfrak{B}, s \notin \mathfrak{B})$	1	$\pm S_{2,s}^{-1}$	Alle ganzen $m_1 \in s \mathfrak{B}$	$m_2 \equiv 0 \pmod{q}$

Für die Anwendungen der Funktionen Q_s auf die oben formulierten Partitionenprobleme ist nach der Theorie von (PI) die Kenntnis der Geschlechter der Gruppen $\Gamma^*[l, q]$ ohne jede Bedeutung. Da diese Gruppen

aber ein gewisses selbständiges Interesse beanspruchen dürfen, sollen ihre Geschlechter jetzt bestimmt werden; es bedarf dazu nur eines geringen Aufwandes. — Wir bedienen uns der folgenden Formel: Bezeichnet p^* das Geschlecht von Γ^* und bedeuten e_2^*, e_3^* die Anzahlen der nach Γ^* inäquivalenten elliptischen Fixpunkte der Ordnungen 2 bzw. 3 von Γ^* , so gilt im Hinblick auf Satz 3

$$(2.5) \quad p^* - 1 + l + \frac{1}{4} e_2^* + \frac{1}{3} e_3^* = \frac{1}{12} l(q+1).$$

Man hat also lediglich e_2^* und e_3^* zu berechnen.

Neben der Geometrie der Modulfigur benutzen wir, daß Γ^* Untergruppe und sogar Normalteiler der bekannten Gruppe $\Gamma^0 = \Gamma^0[q]$ ist, die aus den Modulmatrizen $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $b \equiv 0 \pmod{q}$ besteht. Γ^0 hat den (zusammenhängenden) Fundamentalbereich

$$(2.6) \quad \mathfrak{F}^0 = \sum_{m < \frac{1}{2}q} U^m \mathfrak{E} + T \mathfrak{E}$$

und zerfällt gemäß

$$(2.7) \quad \Gamma^0 = \sum_{s \in \mathfrak{B}} \Gamma^* S_{1,s}$$

in elementfremde Nebenklassen von Γ^* . Daher ist das endlich-teilige Bereichssystem

$$(2.8) \quad \mathfrak{F}^* = \sum_{s \in \mathfrak{B}} S_{1,s} \mathfrak{F}^0$$

eine Fundamentalmenge von Γ^* .

Ein volles System inäquivalenter elliptischer Fixpunkte von Γ^* findet sich demgemäß unter den Punkten

$$(2.9) \quad S_{1,s} U^m i \quad (1 \leq |m| < \tfrac{1}{2}q, s \in \mathfrak{B}), \quad S_{1,s} U^m \xi_3 \quad (1 \leq |m| < \tfrac{1}{2}q, m \neq -1, s \in \mathfrak{B}),$$

und man hat lediglich die Erzeugenden der in Γ enthaltenen Fixgruppen dieser Punkte daraufhin zu prüfen, ob sie in Γ^* liegen. Wird

$$F_{jk} = U^j T U^{-k} = \begin{pmatrix} j - (jk+1) & \\ 1 & -k \end{pmatrix} = -F_{kj}^{-1}$$

geschrieben, so liegen die Erzeugenden

$$(2.10) \quad S_{1,s} F_{mm} S_{1,s}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad S_{1,s} F_{m,m+1} S_{1,s}^{-1} \quad (m, s \text{ wie in (2.9)})$$

wegen

$$S_{1,s} F_{jk} S_{1,s}^{-1} \equiv \begin{pmatrix} j + s(jk+1) & -s^2(jk+1) \\ * & * \end{pmatrix} \pmod{q}$$

genau dann in Γ^* , wenn für $\{j, k\} = \{m, m\}$ bzw. $\{m, m+1\}$

$$(2.11) \quad jk+1 \equiv 0 \pmod{q}, \quad j \in \mathfrak{B}$$

zutrifft. Dies führt auf eine elementar-arithmetische Diskussion.

Mit ihr sind die Anzahlen e_2^* , e_3^* deshalb vollständig zu bestimmen, weil niemals zwei verschiedene der so gewonnenen elliptischen Fixpunkte ω_1, ω_2 von Γ^* einander nach Γ^* äquivalent sein können. Gilt nämlich $\omega_2 = L^* \omega_1$ mit einem L^* aus Γ^* , so läßt sich $L^* \delta^*$ durch eine elliptische Matrix E_2^* aus Γ^* mit dem Fixpunkt ω_2 in ein Bereichssystem $E_2^* L^* \delta^*$ überführen, das mit δ^* innere Punkte gemein hat, also mit δ^* zusammenfällt. Dies gibt in der Gestalt

$$E_2^* L^* \equiv \pm I, \quad E_2^* L^* \omega_1 = \omega_2, \quad \omega_1 \neq \omega_2$$

einen Widerspruch.

Die arithmetische Diskussion liefert im Falle $j = k - m$ [vgl. (2.9, 10, 11)] zunächst für die Anzahl e_2^0 inäquivalenter elliptischer Fixpunkte der Ordnung 2 von Γ^0 den (bekannten) Wert

$$e_2^0 = 1 + \left(\frac{-1}{q} \right)$$

und überdies, daß e_2^* verschwindet, wenn $q \equiv 3 \pmod{4}$ ist. Es sei g eine Primitivzahl mod q und $q \equiv 1 \pmod{4}$. Die ganzen m mit $2 \leq |m| < \frac{1}{2}q$ sind mod q durch

$$m \equiv \pm g^v \quad (1 \leq v \leq \tfrac{1}{2}(q-1) - 1) \pmod{q}$$

repräsentierbar; $m^2 \equiv -1 \pmod{q}$ bedeutet $v = \frac{1}{4}(q-1)$, und es gilt genau dann $m \in \mathfrak{P}$, wenn $q \equiv 1 \pmod{4l}$. Daraus folgt

$$e_2^* = 2l, \text{ wenn } q \equiv 1 \pmod{4l}; \quad e_2^* = 0, \text{ wenn } q \equiv 2l + 1 \pmod{4l}.$$

Im Falle $j = m$, $k = m + 1$ hat man nach (2.11) zunächst die Kongruenz

$$(2.12) \quad m^2 + m + 1 \equiv 0 \pmod{q}, \quad \text{oder} \quad (2m + 1)^2 \equiv -3 \pmod{q}$$

zu erfüllen, was $\left(\frac{q}{3} \right) = +1$ erfordert. Gilt dies, so existiert unter den positiv-reduzierten Resten mod q genau eine ungerade quadratische Kongruenzwurzel $2m + 1$ aus -3 , für die dann $2 \leq m \leq \frac{1}{2}(q-3)$ zutrifft. Da (2.12) auch durch $-m - 1$ an Stelle von m gelöst wird, erhält man für die Anzahl e_3^0 der inäquivalenten Fixpunkte der Ordnung 3 von $\Gamma^0[q]$ den Wert

$$e_3^0 = 1 + \left(\frac{q}{3} \right).$$

Für $q \equiv 1 \pmod{3}$ sind $x = m$ und $x = -m - 1$ die einzigen Lösungen der Kongruenz $x^3 \equiv 1 \pmod{q}$, die den Relationen

$$(2.13) \quad x \not\equiv 1 \pmod{q}, \quad 2 \leq |x| \leq \tfrac{1}{2}(q-1)$$

genügen. Setzt man wieder $x \equiv \pm g^v$ ($1 \leq v \leq \frac{1}{2}(q-3)$) mod q , so bedeutet $x^3 \equiv 1 \pmod{q}$ zusammen mit (2.13), daß $v = \frac{1}{6}(q-1)$ oder $v = \frac{1}{3}(q-1)$ mit dem Minuszeichen im ersten und dem Pluszeichen im zweiten Falle. Ist eines dieser v durch l teilbar, so auch das andere. Daher gilt

$$e_3^* = 2l, \text{ wenn } q \equiv 1 \pmod{6l}; \quad e_3^* = 0, \text{ wenn } q \equiv 2l + 1, 4l + 1 \pmod{6l}.$$

Diese Deduktion besteht bei sinngemäßer Erklärung von $\Gamma^*[1, q]$ auch für $l=1$ und $q=2l+1$, wofern nur $q > 3$ ist. Wir erhalten zusammenfassend nach (2.5)

Satz 4. Es sei l eine natürliche Zahl, q eine Primzahl $\equiv 1 \pmod{2l}$, $q > 3$. Es bezeichne μ^* den Index der Gruppe $\Gamma^* = \Gamma^*[l, q]$ in der vollen Modulgruppe; σ^*, e_2^*, e_3^* die Anzahl inäquivalenter Fixpunkte bzw. der Ordnung $\infty, 2, 3$ von Γ^* ; p^* das topologische Geschlecht von Γ^* . — Dann ist

$$\mu^* = l(q+1), \quad \sigma^* = 2l, \quad e_2^* = 2l \delta\left(\frac{q-1}{4l}\right), \quad e_3^* = 2l \delta\left(\frac{q-1}{6l}\right),$$

$$p^* = 1 + \frac{1}{12} l(q-11) - \frac{1}{2} l \delta\left(\frac{q-1}{4l}\right) - \frac{2}{3} l \delta\left(\frac{q-1}{6l}\right),$$

dabei wie üblich $\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \equiv 0 \pmod{1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

§ 3. Transformation der Funktionen Q_s durch Moduls substitutionen

Für die Darstellung der Partitionenanzahlen $\pi_n(\mathfrak{k})$ durch unendliche Reihen benötigt man die Kenntnis des Verhaltens der mit $u = u_q(\tau)$ gebildeten Funktionen (1.4) in den sämtlichen Spitzen der Gruppe Γ^* . Man gewinnt diese Kenntnis aus den Entwicklungen der Funktionen $Q_s(\tau)$ in den Spitzen, gemäß deren sich das einzelne $Q_s(\tau)$ als Potenzreihe (mit im allgemeinen gebrochenen Exponenten) in der betreffenden Ortsvariablen $\exp 2\pi i \frac{A\tau}{N}$ ausdrückt [Bezeichnungen wie bei (2.1)]. Nach Satz 3 bedeutet das die Darstellung von $Q_s(S_{1,t}\tau)$, $Q_s(S_{2,t}\tau)$ ($s, t \in \mathfrak{B}$) als Potenzreihen in u_q bzw. u_1 .

Wir diskutieren allgemeiner das Verhalten von $Q_s(\tau)$ bei Anwendung beliebiger Moduls substitutionen S . Es sei $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und zunächst $b \equiv 0 \pmod{q}$. Nach (1.10) und (PII), Satz 6 erhält man

$$Q_s(S\tau) = \lambda^{(q-1)/l} (S) \xi_q^{v_s(S)} \varrho(s, a) Q_{sa}(\tau) \quad [\text{vgl. (1.6)}]$$

mit

$$\psi_s(S) = (1-a-b) e_s + a \frac{b}{q} e'_s + 2a \gamma_s(a) \quad [\text{vgl. (1.5, 12)}]$$

und

$$(3.1) \quad \varrho(s, t) = \prod_{\substack{h \\ K_q(t/h) > \frac{1}{2}q}}^{(s)} (-1) \quad (s, t \text{ ganz mit } (st, q) = 1, \text{ vgl. Satz 1}).$$

Das in § 1 dargelegte Verfahren liefert hier

$$\psi_s(S) \equiv e_s - e_{sa} \pmod{q}, \quad \psi_s(S) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Daher wird

$$(3.2) \quad Q_s(S\tau) = \xi_q^{e_s - e_{sa}} \lambda^{(q-1)/l} (S) \eta_s(a) Q_{sa}(\tau) \quad (b \equiv 0 \pmod{q}),$$

wo $\eta_s(a)$ gemäß (1.5), (3.1) durch

$$(3.3) \quad \eta_s(t) = (-1)^{e_s - e_{sa}} \varrho(s, t)$$

zu erklären ist. Auf diese Formel (3.2) läßt sich der Fall eines beliebigen $S \in \Gamma$ mit $a \not\equiv 0 \pmod q$ leicht zurückführen. Der Faktor $\lambda^{(q-1)/l}(S) \eta_s(a)$ ändert sich beim Übergang von S zu $-S$ nicht.

Um den Fall $a \equiv 0 \pmod q$ zu behandeln, bilden wir zunächst nach (1.40)

$$Q_s(T\tau) = \mu_s(-T) \prod_h^{(s)} Q(\tau, 0, h, q) \quad \left(T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Eine Formel von Satz 2 zeigt hier $\mu_s(-T) = \lambda^{(q-1)/l}(-T) = i^{(q-1)/2l}$, und daher ergibt sich

$$(3.4) \quad Q_s(T\tau) = i^{(q-1)/2l} \xi_q^{e_s} \omega_s u_{24l}^{q-1} P_s^*(\tau)$$

mit

$$(3.5) \quad \omega_s = \prod_h^{(s)} 2 \sin \frac{\pi h}{q}, \quad P_s^*(\tau) = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{j \bmod q}^{(s)} (1 - \xi_q^{2j} u_1^m).$$

Bezeichnet K den in der Einleitung genannten absolut-abelschen Zahlkörper, der als Klassenkörper zur Gruppe $\mathfrak{P}$ mit dem Führer q aufgefaßt werden kann, so ist K reell, hat den Absolutgrad l , die Galois-Gruppe $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$ und enthält die (ganz-algebraischen) Koeffizienten der Entwicklung von $P_s^*(\tau)$ in eine Potenzreihe in der Variablen u_1 .

Nun sei $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ mit $a \equiv 0 \pmod q$. Es gilt $S = -S'T$ mit $S' = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$ und daher nach (3.2, 4)

$$(3.6) \quad Q_s(S\tau) = i^{(q-1)/2l} \xi_q^{e_s} \lambda^{(q-1)/l}(ST) \eta_s(b) \omega_{bs} u_{24l}^{q-1} P_{bs}^*(\tau).$$

Die Formeln (3.2, 4, 6) legen es nahe, an Stelle von Q_s die Funktion

$$(3.7) \quad R_s(\tau) = i^{-(q-1)/2l} \xi_q^{-e_s} Q_s(\tau) \quad (s \text{ ganz}, (s, q) = 1)$$

einzuführen. Für sie besteht der folgende

Satz 5. Die Ausdrücke (3.7) $R_s(\tau)$ stellen multiplikative Funktionen der Gruppe $\Gamma^* = \Gamma^*[l, q]$ dar. Sie sind in der oberen τ -Halbebene holomorph und von Null verschieden. In der folgenden Zusammenstellung der Relationen, denen sie genügen, bedeuten s, t ganze Zahlen mit $(st, q) = 1$, $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Modulmatrizen. Es gilt

$$(a) \quad R_t(\tau) = R_s(\tau), \text{ wenn } t \in s\mathfrak{P};$$

$$(b) \quad R_s(\tau) = e^{\pi i \beta_s \tau} P_s(\tau) \quad [\text{vgl. (1.5, 7)}];$$

$$(c) \quad R_s(L\tau) = v(L) R_s(\tau), \text{ wenn } L \in \Gamma^* \quad (\text{vgl. Satz 2});$$

$$(d) \quad R_s(S\tau) = \lambda^{(q-1)/l}(S) \eta_s(a) R_{sa}(\tau), \text{ wenn } b \equiv 0 \pmod q \quad [\text{vgl. (3.1, 3)}];$$

$$(e) \quad R_s(T\tau) = \omega_s u_{24l}^{q-1} P_s^*(\tau) \quad [\text{vgl. (1.6), (3.5)}];$$

$$(f) \quad R_s(S\tau) = \lambda^{(q-1)/l}(ST) \eta_s(b) \omega_{sb} u_{24l}^{q-1} P_{sb}^*(\tau), \text{ wenn } a \equiv 0 \pmod q.$$

Die hier angegebenen Relationen sind bewiesen. Zu ihrer Ergänzung dient, wenn $a \not\equiv 0 \pmod q$ ist und $S' = S U^{-k} = \begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix}$ mit ganzem k und $b' \equiv 0 \pmod q$ bestimmt wird:

$$R_s(S\tau) = \xi_6^{-k(q-1)/2l} \lambda^{(q-1)l} (S) \eta_s(a) R_{sa}(\tau + k) \quad (a \not\equiv 0, b \equiv ak \pmod q).$$

Nach (1.13) ist $q\beta_s \equiv q(q-1)/12l \pmod 2$; dies erklärt, daß die rechte Seite sich beim Übergang von k zu $k+q$ nicht ändert. Um die Behauptungen des Textes von Satz 5 zu bestätigen, hat man lediglich noch (d) mit $S = S_{1,t}$ und (f) mit $S = -S_{2,t}$ ($t \in \mathfrak{B}$, $t \notin \mathfrak{B}$) anzuschreiben. In diesen Formeln

$$(3.8) \quad \begin{cases} R_s(S_{1,t}\tau) = \lambda^{(q-1)l} (S_{1,t}) \eta_s(t) R_{st}(\tau), \\ R_s(S_{2,t}\tau) = \lambda^{(q-1)l} (-S_{2,t}T) \eta_s(t') \omega_{st'} u_{24l}^{q-1} P_{st'}^*(\tau) \end{cases} \quad (s, t \in \mathfrak{B})$$

berechnen sich die ersten Faktoren auf den rechten Seiten nach Satz 2 aus

$$(3.9) \quad \begin{cases} \lambda^2(S_{1,t}) = -i \xi_6^{t+t'} = \xi_6^{t+t'-3}, \\ \lambda^2(-S_{2,t}T) = \lambda^2(-TS_{2,t}) = i^q \xi_6^{-q(t+t')} = \xi_6^{-q(t+t'-3)}. \end{cases}$$

Wir betrachten jetzt die *konstanten Faktoren* auf den rechten Seiten in den Formeln des Satzes 5; es sind dies die Potenzen von $\lambda^2(S)$ für $S \in \Gamma$, sowie ω_s und $\eta_s(t)$ für $(st, q) = 1$. Von ihnen ist ω_s stets > 0 und stets $\neq 1$; $\lambda^2(S)$ ist eine zwölfte Einheitswurzel und hängt von S nur mod 12 ab; $\eta_s(t)$ nimmt nur die Werte ± 1 an, hängt aber davon ab, in welchen Nebenklassen nach der Gruppe der l -ten bzw. $(2l)$ -ten Potenzreste mod q die Zahlen s und t liegen. Eine nennenswerte Reduktion ist weder bei ω_s noch bei $\lambda^2(S)$ zu erwarten. Von ω_s wird in § 5 die Rede sein. Bei $\lambda^2(S)$ wäre lediglich an die — aus der expliziten Darstellung nicht ersichtliche — Charaktereigenschaft zu erinnern, die in (3.9) benutzt wurde. Deutet man die Transposition einer Matrix durch einen Punkt an, so erhält man $T \dot{S} T^{-1} = S^{-1}$ und daraus $\lambda^2(\dot{S}) = \lambda^{-2}(S)$ für $S \in \Gamma$.

Wir untersuchen nun $\eta_s(t)$ etwas näher. Im Falle $l=2$ findet man nach (PII) (3.21), wenn, was hier allein interessiert, t quadratischer Nichtrest mod q ist:

$$(3.10) \quad \eta_s^2(t) = 1, \quad \eta_s(t) \equiv \frac{q-1}{2}! \left(\frac{s}{q}\right) t^{\frac{1}{2}(q-1)} \pmod q \quad (l=2).$$

Für $l > 2$ läßt sich, wie wir zeigen wollen, eine Reduktion durchführen, die aber naturgemäß, da sie im rationalen Zahlkörper operiert, kein abgerundetes Resultat gibt. Das folgende Verfahren betrifft alle $l \geq 2$; die dabei auftretenden r, s, t stellen ganze zu q teilerfremde Zahlen dar.

Zunächst sei hervorgehoben, daß e_s , $\varrho(s, t)$, $\eta_s(t)$ nur von den Restklassen mod q abhängen, in denen s und t liegen. Überdies gilt

$$(3.11) \quad e_{\alpha s} = e_s, \quad \varrho(\alpha s, t) = \varrho(s, t), \quad \eta_{\alpha s}(t) = \eta_s(t) \quad \text{für } \alpha \in \mathfrak{P}.$$

Wir setzen $\vartheta_s = \vartheta(s) = \prod_h^{(s)} h$ und erhalten

$$t^{(q-1)/2l} \vartheta_s = \prod_h^{(s)} t h \equiv \varrho(s, t) \vartheta_{st} \pmod{q},$$

also

$$(3.12) \quad \vartheta_{st} \equiv \varrho(s, t) \vartheta_s t^{(q-1)/2l} \pmod{q}.$$

Da $\vartheta_{\alpha s} = \vartheta_s$ für $\alpha \in \mathfrak{P}$, so folgt nach (1.11)

$$(3.13) \quad \varrho(s, \alpha) = \eta_s(\alpha) = \left(\frac{t/\alpha}{q} \right) \quad \text{für } \alpha \in \mathfrak{P}.$$

Zerlegt man ϑ_{rst} nach (3.12) auf zwei Weisen, so findet man

$$(3.14) \quad \varrho(r, st) = \varrho(r, s) \varrho(r, t)$$

und, da die Faktoren $(-1)^{e_s e_{st}}$ dieselbe Regel befolgen, auch

$$(3.15) \quad \eta_r(st) = \eta_r(s) \eta_r(t).$$

Diese Relation liefert insbesondere

$$(3.16) \quad \eta_s(t) = \eta_1(s) \eta_1(st), \quad \eta_s(1) = 1$$

und nach (3.13)

$$(3.17) \quad \eta_s(\alpha t) = \eta_s(t) \left(\frac{t/\alpha}{q} \right) \quad \text{für } \alpha \in \mathfrak{P}.$$

Hiermit ist die Berechnung der $\eta_s(t)$, wofern man die Werte $\left(\frac{t/\alpha}{q} \right)$ für die α in $\mathfrak{P}$ als bekannt ansieht, auf die der $\eta_1(s)$ für die s eines Vertretersystems $\mathfrak{B}$ zurückgeführt. Im Falle $l \equiv 0 \pmod{2}$ besteht zwischen den $\eta_1(t)$, wenn t die Zahlen eines passend bestimmten Vertretersystems $\mathfrak{B}$ durchläuft, noch eine *Produktrelation*. Wir leiten für beliebige $l \geq 2$ eine *allgemeinere Relation* dadurch her, daß wir t in (3.12) durch ag^v ersetzen, wo a eine feste ganze Zahl mit $(a, q) = 1$, g eine Primitivzahl mod q bezeichnet, und die für $v = 0, 1, \dots, l-1$ entstehenden Kongruenzen miteinander multiplizieren. Da hierbei $sa g^v$ ein Vertretersystem $\mathfrak{B}$ durchläuft, ergibt sich

$$(3.18) \quad \frac{q-1}{2}! \equiv \vartheta_s^l a^{(q-1)/2} g^{l(l-1)(q-1)/4l} \prod_{v=0}^{l-1} \varrho(s, ag^v) \pmod{q}.$$

Andrerseits hat man

$$(3.19) \left\{ \begin{aligned} \vartheta_s^2 &\equiv (-1)^{(q-1)/2l} \prod_h^{(s)} h(q-h) = (-1)^{(q-1)/2l} \prod_{j=1}^{q-1} j^{(s)} \equiv (-s^2)^{(q-1)/2l} \prod_{j=1}^{q-1} j^{(1)} \\ &\equiv (-s^2)^{(q-1)/2l} g^{((q-1)/l-1)(q-1)/2} \equiv (-1)^{(q-1)/2l-1} s^{(q-1)/l} \pmod{q} \end{aligned} \right.$$

und $\sum_{t \in \mathfrak{B}} e_t = \frac{1}{8}(q^2 - 1)$, daher

$$(3.20) \quad \prod_{t \in \mathfrak{B}} (-1)^{e_s - e_{st}} = \left(\frac{2}{q}\right) (-1)^{l e_s}.$$

Wir trennen jetzt die Fälle $l \equiv 0$ und $l \equiv 1 \pmod{2}$.

a) $l \equiv 0 \pmod{2}$. Dann ist $q \equiv 1 \pmod{4}$ und $\left(\frac{q-1}{2}\right)! \equiv -1 \pmod{q}$, also

$$g^{\frac{1}{2}(q-1)} \equiv \pm \frac{q-1}{2}! \cdot g^{l(l-1)(q-1)/4l} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}l} \left(\mp \frac{q-1}{2}!\right) \pmod{q}$$

und nach (3.19, 20)

$$\vartheta_s^l \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(q-1) + \frac{1}{2}l} s^{\frac{1}{2}(q-1)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}l} s^{\frac{1}{2}(q-1)} \prod_{t \in \mathfrak{B}} (-1)^{e_s - e_{st}},$$

also nach (3.18)

$$(3.21) \quad \prod_{v=0}^{l-1} \eta_s(a g^v) \equiv \mp (as)^{\frac{1}{2}(q-1)} \equiv \frac{q-1}{2}! \left(\frac{sa}{q}\right) g^{\frac{1}{2}(q-1)} \pmod{q}.$$

Im Falle $l=2$ wird die linke Seite nach (3.15) gleich $\eta_{sa}(g)$; daher ist (3.21) in (3.10) enthalten ($l=2$). Die genannte Produktrelation ergibt sich aus (3.21) für $s=1$ mit den ag^v als speziellen Vertretern eines Systems $\mathfrak{B}$.

b) $l \equiv 1 \pmod{2}$. Man erhält in ähnlicher Weise, wenn man $\vartheta_s^{l-1} \pmod{q}$ nach (3.19) umformt:

$$(3.22) \quad \prod_{v=0}^{l-1} \eta_s(a g^v) \equiv -\frac{q-1}{2}! (-1)^{(l+1)(q-1)/4} \left(\frac{2a}{q}\right) s^{(l-1)(q-1)/2l} (-1)^{e_s} \vartheta_s \pmod{q}.$$

Hier ist es zweckmäßig, nach (3.19) die Größen $\sigma(s)$ durch

$$\vartheta_s \equiv \begin{cases} \frac{q-1}{2}! s^{(q-1)/2l} \sigma(s) \pmod{q} & \text{für } q \equiv 1 \pmod{4} \\ s^{(q-1)/2l} \sigma(s) \pmod{q} & \text{für } q \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}, \quad \sigma^2(s) = 1$$

einzuführen. Andererseits ist $(-1)^{e_s} \vartheta_s = \prod_h^{(s)} (-1)^h h$ das Produkt eines vollen Halbsystems gerader Reste aus der Nebenklasse $s\mathfrak{B}$ und daher

$$(-1)^{e_s} \vartheta_s \equiv 2^{(q-1)/2l} \vartheta(s/2) \pmod{q},$$

wo $s/2$ in der Restklassengruppe $\mathfrak{N}$ zu bilden ist. Somit ergibt sich schließlich

$$(3.23) \left\{ \begin{array}{l} \prod_{v=0}^{l-1} \eta_s(a g^v) = \left(\frac{a s/2}{q} \right) \sigma(s/2) \quad \text{für } q \equiv 1 \pmod{4}, \\ \prod_{v=0}^{l-1} \eta_s(a g^v) = \frac{q-1}{2}! (-1)^{\frac{1}{2}(l-1)} \left(\frac{a s/2}{q} \right) \sigma(s/2) \pmod{q} \quad \text{für } q \equiv 3 \pmod{4}. \end{array} \right.$$

§ 4. Reihendarstellung und asymptotisches Verhalten der $\pi_n(\mathfrak{f})$

Im folgenden rechnen wir in der üblichen Weise mit für q ganzen Zahlen $\pmod{q}$; bei entsprechender Definition der Restklassen seien $\mathfrak{N}, \mathfrak{P}, \mathfrak{B}$ wie in § 1 erklärt, und es werde dann wieder die Schreibweise (1.2) angewendet. Ist das Vertretersystem $\mathfrak{B}$ und sind die ganzen Zahlen $k_s \geq 0$ ($s \in \mathfrak{B}$) gemäß § 1 gegeben, so bestimmen wir, wenn r für q ganz und nicht durch q teilbar ist, k_r durch (1.3). Entsprechend sind $e_r, e'_r, \beta_r, \omega_r, \varrho(r, t), \eta_r(t), S_{1,r}, S_{2,r}$ aufzufassen. Ist hier auch t für q ganz, $t \equiv t_0 \not\equiv 0 \pmod{q}$, t_0 ganz, so sei $\varrho(r, t) = \varrho(r, t_0)$, $\eta_r(t) = \eta_r(t_0)$. Die Reihenfolge der Komponenten k_s des Vektors $\mathfrak{f}$ kann durch eine Numerierung der s in $\mathfrak{B}$ festgelegt werden. Der Vektor, dessen dem Vertreter s von $\mathfrak{B}$ zugeordnete Komponente an Stelle von k_s den Wert $k_{s_{r^{-1}}}$ hat, wird mit $\mathfrak{f}(r)$ bezeichnet. Die Komponentensumme $k = \sum_{s \in \mathfrak{B}} k_s$ von $\mathfrak{f}$ sei stets > 0 .

Wir setzen [vgl. (1.5), (3.1, 3, 5)]

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta(\mathfrak{f}) = \sum_{s \in \mathfrak{B}} k_s \beta_s = \sum_h k_h g_2 \left(\frac{h}{q} \right), \\ \eta(t, -\mathfrak{f}) = \prod_{s \in \mathfrak{B}} \eta_s^{-k_s}(t), \quad \omega(-\mathfrak{f}) = \prod_{s \in \mathfrak{B}} \omega_s^{-k_s} \end{array} \right.$$

und bilden die Funktionen [vgl. (1.7), (3.5)]

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(\tau, -\mathfrak{f}) = \prod_{s \in \mathfrak{B}} P_s^{-k_s}(\tau) = \prod_{\substack{m=1 \\ (m, q)=1}}^{\infty} (1 - u_q^m)^{-k_m} = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mathfrak{f}) u_q^n, \\ P^*(\tau, -\mathfrak{f}) = \prod_{s \in \mathfrak{B}} P_s^{*-k_s}(\tau) = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{\substack{j \pmod{q} \\ (j, q)=1}} (1 - \xi_q^{2j} u_1^m)^{-k_j}. \end{array} \right.$$

Die Koeffizienten $\pi_n^*(\mathfrak{f})$ in der Reihenentwicklung dieser zweiten Funktion

$$P^*(\tau, -\mathfrak{f}) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n^*(\mathfrak{f}) u_1^n$$

sind ganze algebraische Zahlen des Körpers K . Der Zusammenhang der Produkte (4.2) mit Modulfunktionen wird durch [vgl. (3.7)]

$$(4.3) \quad R(\tau, -\mathfrak{f}) = \prod_{s \in \mathfrak{B}} R_s^{-k_s}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mathfrak{f}) u_q^{n - \frac{1}{2} q \beta(\mathfrak{f})}$$

hergestellt. Mit den Werten $v(L)$ aus Satz 2 und

$$(4.4) \quad \begin{cases} \psi_{1,t}(\mathfrak{f}) = \lambda^{-k(q-1)/l} (S_{1,t}) \eta(t, -\mathfrak{f}) \\ \psi_{2,t}(\mathfrak{f}) = \lambda^{-k(q-1)/l} (-T S_{2,t}) \eta(t^{-1}, -\mathfrak{f}) \end{cases} \quad (t \text{ für } q \text{ ganz, } (t, q) = 1)$$

gilt nach Satz 5 und (3.8)

$$(4.5) \quad \begin{cases} R(L\tau, -\mathfrak{f}) = v^{-k}(L) R(\tau, -\mathfrak{f}) & (L \in \Gamma^*) \\ R(S_{1,t}\tau, -\mathfrak{f}) = \psi_{1,t}(\mathfrak{f}) R(\tau, -\mathfrak{f}(t)) = \psi_{1,t}(\mathfrak{f}) \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mathfrak{f}(t)) u_q^{n-\frac{1}{2}q\beta(\mathfrak{f}(t))} \\ R(S_{2,t}\tau, -\mathfrak{f}) = \psi_{2,t}(\mathfrak{f}) \omega(-\mathfrak{f}(t^{-1})) \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n^*(\mathfrak{f}(t^{-1})) u_1^{n-k(q-1)/24l} \end{cases}$$

Dabei hat u_N^q für reelle N, q mit $N > 0$ die Bedeutung $\exp 2\pi i \frac{q}{N}$, und es ist

$$(4.6) \quad \psi_{1,t}(\mathfrak{f}) = \psi_{2,t}(\mathfrak{f}) = 1 \quad \text{für } t \in \mathfrak{P}.$$

Nunmehr lassen sich die Sätze 1, 2 aus (PII) auf die Funktion $R(\tau, -\mathfrak{f})$ anwenden; man findet

Satz 6 (Reihendarstellung der $\pi_n(\mathfrak{f})$). Wenn $n > 0$ und $> \frac{1}{2}q\beta(\mathfrak{f})$ ist, gilt

$$(4.7) \quad \pi_n(\mathfrak{f}) = \frac{1}{2n - q\beta(\mathfrak{f})} \sum_{s \in \mathfrak{P}} (\mathfrak{S}_n^{(1,s)}(\mathfrak{f}) + \mathfrak{S}_n^{(2,s)}(\mathfrak{f})).$$

Hier bedeuten $\mathfrak{S}_n^{(1,s)}, \mathfrak{S}_n^{(2,s)}$ die linearen Komposita

$$(4.8) \quad \begin{cases} \mathfrak{S}_n^{(1,s)}(\mathfrak{f}) = \psi_{1,s}(\mathfrak{f}) \sum_{0 \leq m < \frac{1}{2}q\beta(\mathfrak{f}(s))} \pi_m(\mathfrak{f}(s)) a_{n - \frac{1}{2}q\beta(\mathfrak{f})}(S_{1,s}^{-1}, \mathfrak{R}, \frac{1}{2}q\beta(\mathfrak{f}(s)) - m), \\ \mathfrak{S}_n^{(2,s)}(\mathfrak{f}) = \\ = \psi_{2,s}(\mathfrak{f}) \omega(-\mathfrak{f}(s^{-1})) \sum_{0 \leq m < k(q-1)/24l} \pi_m^*(\mathfrak{f}(s^{-1})) a_{n - \frac{1}{2}q\beta(\mathfrak{f})}(S_{2,s}^{-1}, \mathfrak{R}, k(q-1)/24l - m) \end{cases}$$

der unendlichen Reihen

$$(4.9) \quad \begin{cases} a_{n-\mu}(S_{1,s}^{-1}, \mathfrak{R}, \mu_{1,s} - m) = \\ = \sum_{m_1=1}^{\infty} W_{m_1}(n - \mu, S_{1,s}^{-1}, \mathfrak{R}, m - \mu_{1,s}) f_1\left(\frac{4\pi}{m_1 q} \sqrt{(n - \mu)(\mu_{1,s} - m)}\right), \\ a_{n-\mu}(S_{2,s}^{-1}, \mathfrak{R}, \mu_{2,s} - m) = \\ = \sum_{\substack{m_1=1 \\ m_1 \in \mathfrak{P}}}^{\infty} W_{m_1}(n - \mu, S_{2,s}^{-1}, \mathfrak{R}, m - \mu_{2,s}) f_1\left(\frac{4\pi}{m_1 q} \sqrt{(n - \mu)(\mu_{2,s} - m)}\right). \end{cases}$$

$\mathfrak{R}$ symbolisiert die Formenklasse $\{\Gamma^*, -2, v\}$, die willkürlichen Werte $v(S_{1,s}^{-1})$, $v(S_{2,s}^{-1})$ ($s \in \mathfrak{B}$) wurden -1 gesetzt, $\mu, \mu_{1,s}, \mu_{2,s}$ stehen zur Abkürzung für

$$(4.10) \quad \mu = \frac{1}{2}q\beta(\mathfrak{f}) = \mu_{1,1}, \quad \mu_{1,s} = \frac{1}{2}q\beta(\mathfrak{f}(s)), \quad \mu_{2,s} = k(q-1)/24l,$$

und in den Ausdrücken für $a_{n-\mu}$ ist sowohl $n-\mu$, als auch $\mu_{1,s}-m$, als auch $\mu_{2,s}-m$ positiv; die Erklärung durch BESSELSche Funktionen und eine asymptotische Eigenschaft von f_1 besagen

$$(4.11) \quad f_1(z) = zI_1(z), \quad f_1(2\pi u) \sim \sqrt{u} e^{2\pi u} (1 + O(u^{-1})) \quad (u > 0, u \rightarrow +\infty).$$

Von den oben definierten Aggregaten $\mathfrak{E}_n^{(1,s)} (s \in \mathfrak{B})$ ist mindestens eines leer. Denn da die Ordnungensumme der Funktion $R(\tau, -\mathfrak{f})$ nach Satz 5 verschwindet, gilt nach (4.5)

$$-\frac{1}{2}q \sum_{t \in \mathfrak{B}} \beta(\mathfrak{f}(t)) = \frac{k(q-1)}{24} = 0, \quad \text{also} \quad \sum_{t \in \mathfrak{B}} \beta(\mathfrak{f}(t)) = -\frac{k(q-1)}{12q},$$

was man elementar bestätigen kann; es sind also nicht alle $\beta(\mathfrak{f}(s)) > 0$ ($s \in \mathfrak{B}$).

Um aus der Reihendarstellung von Satz 5 eine *asymptotische Entwicklung* für die $\pi_n(\mathfrak{f})$ ($n \rightarrow \infty$) abzuleiten, hat man ein geeignetes endliches Teilsystem der Reihenglieder — unter Berücksichtigung insbesondere der Werte π_m^* und W_{m_1} — nach der Stärke des Anwachsens zu ordnen und zu zeigen, daß das Aggregat der restlichen Glieder schwächer anwächst, als alle Glieder des Systems. Wegen (PII) Satz 1 und (4.11) kann man sich darauf beschränken, die Größenordnungen der einzelnen Glieder zu vergleichen. Wir beweisen in dieser Richtung vier Sätze. Der erste besteht in der Bestimmung des am stärksten anwachsenden Gliedes der Darstellung. Der zweite folgt aus dem ersten und gibt eine schwächere asymptotische Formel in elementaren Ausdrücken. Diese beiden Sätze gelten allgemein, und zwar sogar für die umfassenden Partitionenfunktionen p_n aus (PI). Der dritte und vierte Satz hingegen gelten bei gegebenem l nur für die q oberhalb gewisser Grenzen. Sie besagen, daß gewisse mit $m_1=1$ bzw. mit $m_1=1$ und $m_1=2$ gebildete Glieder des betreffenden Aggregats $\mathfrak{E}^{(2,s)}$ alle anderen asymptotisch überwiegen.

Das Verfahren, das man zum Beweis solcher Sätze, insbesondere des dritten und vierten, anwenden muß, wurde in (PII) § 4 ausführlich erläutert, so daß wir uns hier kurz fassen können. Man hat zunächst unter den Voraussetzungen von Satz 5

$$(4.12) \quad W_1(n - \mu, S_{2,1}^{-1}, \mathfrak{R}, \mu_{2,1} - m) = 1$$

und in grober Annäherung

$$(4.13) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu_{2,1} - \frac{1}{q}\mu_{1,s} &= k\frac{q-1}{24l} - \frac{1}{2} \sum_h k_{hs^{-1}} \left(\frac{h^2}{q} - \frac{h}{q} + \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_h k_{hs^{-1}} \left(\frac{h}{q} - \frac{h^2}{q^2} \right) > k\frac{q-1}{16l^2} \left(1 - \frac{1}{3l} \right) \left(1 - \frac{1}{q} \right)^2. \end{aligned} \right.$$

Daraus folgt

Satz 7. Mit $\varrho_1 = 2\pi \sqrt{\frac{k}{6l}} \left(1 - \frac{1}{q}\right)$ gilt für $n \rightarrow \infty$

$$(4.14) \quad \pi_n(\mathfrak{f}) = \frac{\omega(-\mathfrak{f})}{2n-2\mu} f_1(\varrho_1 | \overline{n-\mu}) + O(n^{-1} f_1(\varrho_1' | \overline{n-\mu}));$$

hier bezeichnet ϱ_1' eine von n unabhängige Zahl mit $0 < \varrho_1' < \varrho_1$. Ist sowohl $\frac{k(q-1)}{32l}$ als auch die untere Schranke in (4.13) mindestens 1, so kann

$$\varrho_1' = 2\pi \sqrt{\frac{k}{6l}} \left(1 - \frac{1}{q}\right) - \frac{4}{q} = \varrho_1 \sqrt{1 - \frac{24l}{k(q-1)}}$$

gesetzt werden.

(4.14) entsteht aus (PI) (10.7) durch Spezialisierung auf das vorliegende Problem. Benutzt man die asymptotische Formel

$$f_1(z) = e^z \sqrt{\frac{z}{2\pi}} \left(1 - \frac{3}{2^3 z} - \frac{15}{2^7 z^2} - \frac{105}{2^{10} z^3} + O(z^{-4})\right) \quad (z > 0, z \rightarrow \infty),$$

so erhält man

Satz 8. Es gilt

$$\pi_n(\mathfrak{f}) = \frac{\omega(-\mathfrak{f})}{2} \sqrt{\frac{q_1}{2\pi}} \left| \varrho_1 n^{-\frac{3}{2}} e^{\varrho_1} \right|^n \left(1 + c_1 n^{-\frac{1}{2}} + c_2 n^{-1} + c_3 n^{-\frac{3}{2}} + O(n^{-2})\right)$$

mit den Werten $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + a_1 b_1 + b_2$, $c_3 = a_3 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + b_3$, wo

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2} \varrho_1 \mu, & a_2 &= \frac{1}{8} \varrho_1^2 \mu^2, & a_3 &= -\frac{1}{48} \varrho_1^3 \mu^3 - \frac{1}{8} \varrho_1 \mu^2, \\ b_1 &= -\frac{3}{2^3} \varrho_1, & b_2 &= \frac{3}{4} \mu - \frac{15}{2^7 \varrho_1^2}, & b_3 &= -\frac{21}{32 \varrho_1} \mu - \frac{105}{2^{10} \varrho_1^3}. \end{aligned}$$

Satz 8 gilt wörtlich für die Partitionenanzahlen $p_n([k], [l], N)$ aus (PI) Satz 14 an Stelle von $\pi_n(\mathfrak{f})$, wenn in der obigen Formel $\omega(-\mathfrak{f})$, μ durch die analog definierten Zahlen ω_0 bzw. $-\frac{1}{2}N\beta$ aus (PI) Satz 14 ersetzt werden. Daß, wie dort behauptet, die Fehlerabschätzung in (PI) (10.9) nicht verschärfbar ist, besagt nach Satz 8 genau, daß c_1 nicht verschwindet. Da μ und $\bar{K}$ rationale Zahlen sind, bedeutet dies die Irrationalität von π^2 .

Um die anderen beiden Sätze zu beweisen, bedarf man einer schärferen Abschätzung der $\beta(\mathfrak{f}(s))$ nach oben, als sie (4.13) liefert. Es bedeute χ einen der l Restcharaktere mod q , die auf der Gruppe $\mathfrak{A}$ zu 1 werden. Wir bilden, indem wir uns einer bekannten analytischen Identität sowie bekannter Umformungen und Bezeichnungen bedienen:

$$\begin{aligned} B(\chi) &= \sum_{s \in \mathfrak{B}} \chi(s) \beta_s = \sum_h \chi(h) g_2\left(\frac{h}{q}\right) \\ &= \sum_h \chi(h) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m}{\pi^2 m^2} \frac{h}{q} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 m^2} \sum_{j \bmod q} \chi(j) \xi_q^{2mj}. \end{aligned}$$

Im Falle des Hauptcharakters $\chi = \chi_0$ ist $B(\chi) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & q \end{pmatrix}$. Im Falle $\chi \neq \chi_0$ ist

$$\sum_{j \bmod q} \chi(j) \xi_q^{2mj} = \bar{\chi}(m) G(\chi) \quad \text{mit} \quad G(\chi) = \sum_{j \bmod q} \chi(j) \xi_q^{2j},$$

also

$$B(\chi) = \frac{1}{2\pi^2} G(\chi) L(2, \bar{\chi}),$$

und daher

$$|B(\chi)| < \frac{1}{12} \sqrt{q} \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) \quad (\chi \neq \chi_0).$$

mithin wegen $l\beta_s = \sum_x \bar{\chi}(s) B(\chi)$ insgesamt

$$(4.15) \quad \begin{aligned} |\beta_s| &< \frac{1}{12l} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left\{ \sqrt{q} \left(1 + \frac{1}{q}\right) (l-1) + 1 \right\}, \\ \left| \frac{1}{2} \beta(\mathfrak{f}(s)) \right| &< \frac{k(q-1)}{2+lk} \left\{ \sqrt{q} \left(1 + \frac{1}{q}\right) (l-1) + 1 \right\}. \end{aligned}$$

Es sind jetzt hinreichende Bedingungen dafür aufzustellen, daß

$$(4.16) \quad \max_{s \in \mathfrak{B}} \frac{1}{2} \beta(\mathfrak{f}(s)) < \frac{1}{4} \mu_{2,1} \quad \text{bzw.} \quad < \frac{1}{9} \mu_{2,1}$$

zutrifft. Mit $n_0 = 2$ bzw. 3 ist eine solche hinreichende Bedingung nach (4.10, 15):

$$(4.17) \quad \left(1 + \frac{1}{q}\right) (l-1) + \frac{1}{\sqrt{q}} \leq \frac{1}{n_0^2} \sqrt{q}.$$

Ersetzt man hier $\sqrt{q}$ durch eine positive Variable x , so stellt die linke Seite eine monoton fallende, die rechte Seite eine monoton steigende Funktion von x dar. Es genügt also, ein $x > 0$ anzugeben, das die Ungleichung erfüllt. Man setze $x = n_0^2(l-1)y$. Dann handelt es sich um

$$(4.18) \quad 1 + \frac{1}{n_0^4(l-1)^2 y^2} + \frac{1}{n_0^2(l-1)^2 y} \leq y,$$

und (4.18) gilt für $y = 1 + (n_0^2(l-1))^{-1}$. Denn es ist $n_0^2(l-1)y - 1 = n_0^2(l-1)$, demnach

$$y = 1 + \frac{1}{n_0^2(l-1)y} \left(1 - \frac{1}{n_0^2(l-1)y}\right)^{-1} > 1 + \frac{1}{n_0^2(l-1)y} + \frac{1}{n_0^4(l-1)^2 y^2},$$

und dies ist in der Tat größer als die linke Seite von (4.18). Daher gilt (4.17), wenn

$$q \geq (4l-3)^2 \quad (n_0 = 2) \quad \text{und} \quad q \geq (9l-8)^2 \quad (n_0 = 3),$$

und nun ergibt sich

Satz 9. Aus $q \geq (4l-3)^2$ folgt (4.17) mit $n_0 = 2$ und daraus folgt für $n \rightarrow \infty$

$$\pi_n(\mathfrak{f}) = \frac{\omega(-\mathfrak{f})}{2n-2\mu} \sum_{0 \leq m < k \frac{q-1}{32l}} \pi_m^*(\mathfrak{f}) f_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{\left(k \frac{q-1}{24l} - m\right)(n-\mu)} \right) + \\ + O \left(n^{-1} f_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{k \frac{q-1}{96l} (n-\mu)} \right) \right).$$

Um eine noch genauere explizite asymptotische Darstellung zu gewinnen, muß man die Werte $W_2(n-\mu, S_{2,s}^{-1}, \mathfrak{R}, \mu_{2,s} - m)$ für $2 \in s\mathfrak{P}$ ausrechnen. Die umständliche Rechnung ergibt, wenn die ganzen Zahlen $e_s^*((s, q) = 1)$, $e^*(\mathfrak{f})$ durch

$$2e_s^* = qe_s - e'_s = \sum_h^{(s)} h(q-h), \quad e^*(\mathfrak{f}) = \sum_{s \in \mathfrak{P}} k_s e_s^*$$

erklärt werden:

$$\psi_{2,s}(\mathfrak{f}) W_2(n-\mu, S_{2,s}^{-1}, \mathfrak{R}, \mu_{2,s} - m) = \eta(2^{-1}, -\mathfrak{f}) (-1)^{e^*(\mathfrak{f}) + m + n}.$$

Hier ist $s=2$ zu setzen, wenn $2 \notin \mathfrak{P}$. Damit findet sich

Satz 10. Aus $q \geq (9l-8)^2$ folgt (4.17) mit $n_0 = 3$ und daraus für $n \rightarrow \infty$

$$\pi_n(\mathfrak{f}) = \frac{\omega(-\mathfrak{f})}{2n-2\mu} \sum_{0 \leq m < k \frac{q-1}{27l}} \pi_m^*(\mathfrak{f}) f_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{\left(k \frac{q-1}{24l} - m\right)(n-\mu)} \right) + \\ + (-1)^{e^*(\mathfrak{f}) + n} \eta(2^{-1}, -\mathfrak{f}) \frac{\omega(-\mathfrak{f}(2^{-1}))}{2n-2\mu} \sum_{0 \leq m < k \frac{q-1}{43,2l}} (-1)^m \pi_m^*(-\mathfrak{f}(2^{-1})) \times \\ \times f_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{\left(k \frac{q-1}{96l} - \frac{m}{4}\right)(n-\mu)} \right) + O \left(n^{-1} f_1 \left(\frac{4\pi}{\sqrt{q}} \sqrt{k \frac{q-1}{216l} (n-\mu)} \right) \right).$$

Das Beispiel $l=2$ [vgl. (PII) § 4, Tabelle 5] läßt vermuten, daß die in Satz 9 und 10 genannten unteren Schranken $(4l-3)^2$ bzw. $(9l-8)^2$ für q in numerischen Fällen, etwa für $l=3$ und 4, noch beträchtlich erniedrigt werden können.

§ 5. Asymptotische Relationen. Konstantenbestimmung

Wir betrachten zunächst das asymptotische Verhalten des Quotienten $\frac{\pi_n(\mathfrak{f}^*)}{\pi_n(\mathfrak{f})}$ für $n \rightarrow \infty$; dabei wird angenommen, daß $\pi_n(\mathfrak{f})$ und $\pi_n(\mathfrak{f}^*)$ mit den gleichen Parametern l, q , aber mit verschiedenen Vektoren $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}^*$ gebildet sind. Aus Satz 8 folgt sofort, daß der obige Quotient für $n \rightarrow \infty$ einem positiven

Grenzwert zustrebt, wenn (die k entsprechende natürliche Zahl) k^* mit k übereinstimmt. Genauer ergibt sich aus Satz 8 der folgende

Satz 11. *Bildet man die Partitionenzahlen $\pi_n(\mathfrak{k})$, $\pi_n(\mathfrak{k}^*)$ mit den gleichen Parametern l, q , so gilt unter der Voraussetzung $k^* = k$ und in der Bezeichnung $\mu^* = \frac{1}{2}q\beta(\mathfrak{k}^*)$:*

$$\frac{\pi_n(\mathfrak{k}^*)}{\pi_n(\mathfrak{k})} = \frac{\omega(-\mathfrak{k}^*)}{\omega(-\mathfrak{k})} \left(1 + \delta_1 n^{-\frac{1}{2}} + \delta_2 n^{-1} + \delta_3 n^{-\frac{3}{2}} + O(n^{-2}) \right) \quad (n \rightarrow \infty);$$

hier ist

$$\delta_1 = -\frac{1}{2} \varrho_1(\mu^* - \mu), \quad \delta_2 = \frac{1}{8} \varrho_1^2(\mu^* - \mu)^2 + \frac{3}{4}(\mu^* - \mu),$$

$$\delta_3 = -\frac{1}{48} \varrho_1^3(\mu^* - \mu)^3 - \frac{1}{4} \varrho_1(\mu^* - \mu)(2\mu^* - \mu) - \frac{3}{16} \varrho_1^{-1}(\mu^* - \mu).$$

Auch dieser Satz besteht bei sinngemäßer Übertragung der Bezeichnung wörtlich für die allgemeinen Partitionenfunktionen von (PI) Satz 14, vgl. auch den in der Einleitung von (PII) genannten Satz hierüber; für η, η^* ist jetzt $-\mu, -\mu^*$ zu schreiben. Im folgenden beschränken wir uns auf die Situation des Satzes 11, die wir noch weiter spezialisieren werden; die obige asymptotische Formel verwenden wir nur mit dem Fehlerglied $O(n^{-1})$.

Wir denken uns einen Vektor $\mathfrak{k}$ gemäß § 1 fest gewählt und betrachten nun die sämtlichen l arithmetischen Funktionen $\pi_n(\mathfrak{k}(s))$ ($s \in \mathfrak{B}$) von n gleichzeitig; von hier ab wird wieder die Terminologie, wie sie zu Beginn des § 4 erklärt wurde, benutzt. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir

$$(5.1) \quad \begin{cases} \pi_n[s] = \pi_n(\mathfrak{k}(s)), & \omega[s] = \omega(-\mathfrak{k}(s)), & \beta[s] = \beta(\mathfrak{k}(s)); \\ z_n = \frac{q \varrho_1}{4 \sqrt{n}}, & u[s] = \log \omega[s] - z_n \beta[s]; \end{cases}$$

die Logarithmen positiver Zahlen sind reell, die Quadratwurzeln positiv zu wählen. Aus Satz 11 folgt zunächst

$$(5.2) \quad \log \frac{\pi_n[s t^{-1}]}{\pi_n[s]} = u[s t^{-1}] - u[s] + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (s, t \in \mathfrak{B}, n \rightarrow \infty).$$

Unter den Zahlen s des Vertretersystems $\mathfrak{B}$ befinde sich $s=1$ als Vertreter der Hauptklasse $\mathfrak{B}$; wir zeichnen irgendeine Anordnung von $\mathfrak{B}$, in der $s=1$ an erster Stelle steht, aus. Entspricht jedem Paar von Elementen s, t von $\mathfrak{B}$ eine komplexe Zahl $w_{s,t}$, so bilden wir die Matrix $(w_{s,t})$ mit s als Zeilen-, t als Spaltenindex in der gleichen fest gewählten Reihenfolge. Wird die Matrix mit den Elementen $w_{s,t}$ unter Ausschluß von $s=1$ und von $t=1$ in dieser Weise gebildet, so bezeichnen wir sie mit $(w_{s,t})_*$. Entsprechend werde mit Determinanten verfahren. In diesem Sinne ist nach (5.2) für $n \rightarrow \infty$

$$(5.3) \quad \left| \log \frac{\pi_n[s t^{-1}]}{\pi_n[s]} \right|_* = \left| \log \frac{\pi_n[s t^{-1}]}{\pi_n[t^{-1}]} \right|_* = |u[s t^{-1}] - u[s]|_* + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Zur Vereinfachung der Determinante auf der rechten Seite bedienen wir uns des folgenden leicht beweisbaren Hilfssatzes: Sind a_{jk}, b_{jk} ($j, k = 1, 2, \dots, m$) komplexe Zahlen derart, daß

$$\sum_{j=1}^m a_{jk} = a \neq 0, \quad a \text{ von } k \text{ unabhängig}, \quad \sum_{j=1}^m b_{jk} = 0,$$

so gilt in der zu der obigen analogen Bezeichnung

$$(5.4) \quad \left| \sum_{j=1}^m a_{jv} b_{vk} \right|_* = |a_{jk} - a_{j1}|_* |b_{jk}|_* = \frac{1}{a} |a_{jk}|_* |b_{jk}|_*.$$

Es sei [vgl. (1.5), (3.5), (5.1); eine Verwechslung mit (1.6) u_m ist nicht zu befürchten]

$$(5.5) \quad u_r = -\log \omega_r - z_n \beta_r \quad (r \in \mathfrak{B}).$$

Wir wenden den Hilfssatz auf $k_{s^{-1}t} = a_{jk}, u_{s^{-1}t} - u_s = b_{jk}$ ($l = m$) an und erhalten

$$|u[s t^{-1}] - u[s]|_* = \frac{D}{k} |u_{s t^{-1}} - u_s|_* \quad (D = |k_{s t^{-1}}|);$$

nach (5.3) wird also mit diesem Werte D :

$$(5.6) \quad \left| \log \frac{\pi_n[s t^{-1}]}{\pi_n[t^{-1}]} \right|_* = \frac{D}{k} |u_{s t^{-1}} - u_{t^{-1}}|_* + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Hier erscheint auf der linken Seite das genaue Analogon des Regulators des Systems

$$(5.7) \quad Q_n[s] = \frac{\pi_n[s]}{\pi_n[1]} = \frac{\pi_n(\mathfrak{f}(s))}{\pi_n(\mathfrak{f})} \quad (s \in \mathfrak{B}),$$

bezogen auf den bei (3.5) eingeführten reellen absolut-abelschen Zahlkörper K zum Führer q . Wir setzen

$$(5.8) \quad R(Q_n[s]) = \left| \log \frac{\pi_n[s t^{-1}]}{\pi_n[t^{-1}]} \right|_*$$

und nennen diese arithmetische Funktion von n kurz den *Regulator der Anzahlquotienten* $Q_n[s]$. Im folgenden beschreiben wir zwei Verfahren zur asymptotischen Auswertung des Regulators (5.8) mit einem Fehler von der Größenordnung $O(n^{-1})$. Ersichtlich kommt es darauf an, die Determinante $|u_{s t^{-1}} - u_{t^{-1}}|_*$, die nach (5.5) von n abhängt, in diesem Sinne auszuwerten.

Das erste Verfahren schließt sich an die in HASSE [3] II. 11. mitgeteilte Umformung an. Danach ist, wenn die oben in § 4 eingeführten Charaktere χ herangezogen werden,

$$|u_{s t^{-1}} - u_{t^{-1}}|_* = \prod_{\chi \neq 1} \sum_{s \in \mathfrak{B}} \chi(s) u_s,$$

und eine bekannte Methode, die auch in § 4 zum Beweise der Sätze 9 und 10 angewendet wurde, liefert nun

$$\sum_{s \in \mathfrak{B}} \chi(s) u_s = \frac{1}{2} G(\chi) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{\chi}(m)}{m} \left(1 - \frac{z_n}{\pi^2 m}\right).$$

Das über die $\chi \neq 1$ zu erstreckende Produkt der GAUSSschen Summen $G(\chi)$ hat für ungerades l offenbar den Wert $q^{\frac{1}{2}(l-1)}$, weil dann alle Charaktere $\chi \neq 1$ paarweise konjugiert-komplex sind. Für gerades l existiert neben den $\frac{1}{2}(l-2)$ Paaren konjugiert-komplexer Charaktere noch genau ein quadratischer Charakter $\chi(m) = \left(\frac{m}{q}\right)$. Daher gilt in beiden Fällen

$$\prod_{\chi \neq 1} \frac{1}{2} G(\chi) = \left(\frac{1}{2} \mid q\right)^{l-1} = 2^{1-l} \mid d,$$

wo d die Diskriminante von K bezeichnet (vgl. HASSE [3] I. 3. nach HECKE [4]).

So entsteht

$$\left|u_{st^{-1}} - u_{t^{-1}}\right|_* = 2^{1-l} \mid \bar{d} \prod_{\chi \neq 1} \left(L(1, \chi) - \frac{z_n}{\pi^2} L(2, \chi)\right)$$

und mithin nach (5.6) und HASSE [3] I. 2. (4) der folgende

Satz 12. *Der (in bezug auf den reellen absolut-abelschen Zahlkörper K vom Grade l) gebildete Regulator (5.8) $R(Q_n[s])$ der Anzahlquotienten (5.7) $Q_n[s]$ gestattet die asymptotische Darstellung*

$$R(Q_n[s]) = \frac{D}{h} h R \left(1 + C_1 n^{-\frac{1}{2}}\right) + O(n^{-1}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Hier bezeichnet h die Klassenzahl, R den Regulator von K und C_1 den Wert

$$(5.9) \quad C_1 = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{h}{6l} q(q-1)} \sum_{\chi \neq 1} \frac{L(2, \chi)}{L(1, \chi)};$$

in der Summe durchläuft χ alle vom Hauptcharakter verschiedenen Restcharaktere mod q , die auf der Gruppe $\mathfrak{B}$ der l -ten Potenzreste mod q zu 1 werden.

Das zweite Verfahren geht von der Darstellung (5.5) aus. Wir setzen

$$(5.10) \quad \Omega_* = (\log \omega_{t^{-1}} - \log \omega_{st^{-1}})_*, \quad \mathbf{B}_* = (\beta_{t^{-1}} - \beta_{st^{-1}})_* \quad (s, t \in \mathfrak{B}, s \neq 1 \neq t)$$

und erhalten mit $I_* = (\delta_{s,t})_*$ zunächst

$$\left|u_{st^{-1}} - u_{t^{-1}}\right|_* = |\Omega_* + z_n \mathbf{B}_*| = |\Omega_*| |I_* + z_n \Omega_*^{-1} \mathbf{B}_*|.$$

Nach HASSE [3] II. 11. (4) ist wieder $|\Omega_*| = hR$. Man findet also

$$R(Q_n[s]) = \frac{D}{h} h R \left(1 + z_n \operatorname{Sp} \Omega_*^{-1} \mathbf{B}_*\right) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

mithin für den Wert C_1 aus Satz 12 den neuen Ausdruck

$$(5.11) \quad C_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{k}{6l}} q(q-1) \operatorname{Sp}(\Omega_*^{-1} \mathbf{B}_*)$$

in dem Sp die Spurbildung andeutet. Der Vergleich von (5.9) mit (5.11) ergibt

$$(5.12) \quad \sum_{\chi \neq 1} \frac{L(2, \chi)}{L(1, \chi)} = -\pi^2 \operatorname{Sp}(\Omega_*^{-1} \mathbf{B}_*).$$

Die weiteren Überlegungen zielen, wie eingangs erwähnt, darauf ab, die Elemente der Matrizen (5.10) Ω_* , $\mathbf{B}_*$, aus denen sich C_1 zusammensetzt, mit gewissen *Invarianten* des Körpers $\mathbf{K}$ in Beziehung zu bringen. Das über dem Körper der rationalen Zahlen irreduzible Kreisteilungspolynom $f(u)$ der Ordnung q zerfällt in $\mathbf{K}$ in l irreduzible Faktoren $f_s(u)$ ($s \in \mathfrak{B}$) gemäß der Aufspaltung

$$(5.13) \quad f(u) = \prod_{\substack{k \bmod q \\ k \neq 0}} (u - \xi_q^{2k}) = \prod_{s \in \mathfrak{B}} f_s(u), \quad f_s(u) = \prod_{j \bmod q}^{(s)} (u - \xi_q^{2j}),$$

und man findet zunächst

$$(5.14) \quad f_s(1) = \prod_h^{(s)} (1 - \xi_q^{2h}) (1 - \xi_q^{-2h}) = \prod_h^{(s)} (-1) (\xi_q^h - \xi_q^{-h})^2 = \omega_s^2,$$

also nach (5.13)

$$(5.15) \quad f(1) = q = \prod_{s \in \mathfrak{B}} \omega_s^2.$$

Auf Grund bekannter Schlüsse gewinnt man hieraus

Satz 13. Die durch (3.5) erklärten l Zahlen ω_s^2 ($s \in \mathfrak{B}$) sind konjugierte positive ganze Zahlen des Zahlkörpers $\mathbf{K}$. Die l Hauptideale (ω_s^2) stimmen miteinander und mit dem einzigen Primideal $\mathfrak{q}$ von $\mathbf{K}$ überein, das in q aufgeht; es gilt $(q) = \mathfrak{q}^l$.

Aus diesem Satze folgt sofort, daß keines der ω_s eine algebraische Einheit, geschweige denn $= 1$ ist. Man bestätigt elementar, daß die Quotienten zweier ω_s^2 sämtlich Einheiten in $\mathbf{K}$ sind. Darüber hinaus sind nach HASSE [3] II. 10. bereits die Quotienten zweier ω_s Einheiten in $\mathbf{K}$.

Wir betrachten nun die $f_s(u)$ als Polynome in $u - 1$ und schreiben (vgl. [5])

$$(5.16) \quad \begin{cases} f_s(u) = \sum_{0 \leq m \leq (q-1)/l} \lambda_m(s) (u-1)^m & (\lambda_0(s) = \omega_s^2), \\ \varrho_m(s) = \lambda_m(s) \omega_s^{-2} & (1 \leq m \leq (q-1)/l); \end{cases}$$

wir gehen darauf aus, die Elemente der Matrix $\mathbf{B}_*$ durch die $\varrho_2(s)$ auszudrücken. Zu diesem Zwecke setzen wir $u = e^{2\pi i \tau}$,

$$\varphi_s(\tau) = f_s(e^{2\pi i \tau}) = \prod_h^{(s)} (e^{2\pi i \tau} - \xi_q^{2h}) (e^{2\pi i \tau} - \xi_q^{-2h})$$

und wenden hierauf die in (5.14) angedeutete Umformung an. Dann ergibt sich

$$\varphi_s(\tau) = 2^{(q-1)/l} \exp 2\pi i \frac{q-1}{2l} \tau \prod_h^{(s)} \sin \pi \left(\frac{h}{q} - \tau \right) \sin \pi \left(\frac{h}{q} + \tau \right).$$

Wird diese Gleichung einmal logarithmisch und sodann nochmals differenziert, so kommt

$$\psi'_s(\tau) = \frac{\varphi'_s(\tau)}{\varphi_s(\tau)} = 2\pi i \frac{q-1}{2l} + \sum_h^{(s)} \left\{ -\pi \operatorname{ctg} \pi \left(\frac{h}{q} - \tau \right) + \pi \operatorname{ctg} \pi \left(\frac{h}{q} + \tau \right) \right\},$$

$$\begin{aligned} \psi''_s(\tau) &= \frac{\varphi''_s(\tau)}{\varphi_s(\tau)} - \frac{\varphi'^2_s(\tau)}{\varphi_s^2(\tau)} = - \sum_h^{(s)} \left\{ \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi \left(\frac{h}{q} - \tau \right)} + \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi \left(\frac{h}{q} + \tau \right)} \right\} \\ &\quad - q^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(q\tau + m)^2}, \end{aligned}$$

$$L(2, \chi) = \frac{-1}{2q^2} \sum_{s \in \mathfrak{B}} \chi(s) \psi''_s(0).$$

Andrerseits erhält man aus (5.16) und $\varphi_s(\tau) = f_s(u)$ durch eine geringe Rechnung

$$\varrho_1(s) = \frac{q-1}{2l}, \quad \varrho_2(s) = \frac{(q-1)(q-2l-1)}{8l^2} - \frac{1}{8\pi^2} \psi''_s(0)$$

und daraus unmittelbar

$$(5.17) \quad -\frac{1}{4\pi^2} L(2, \chi) = q^{-2} \sum_{s \in \mathfrak{B}} \chi(s) \varrho_2(s) \quad (\chi \neq 1).$$

Trägt man (5.17) in den Formalismus ein, der in § 4 nach Satz 8 kurz entwickelt wurde, so findet man

$$\begin{aligned} \beta_s &= -\frac{q-1}{12lq} + \frac{1}{l} \sum_{\chi \neq 1} \chi(s) G(\bar{\chi}) \frac{1}{2\pi^2} L(2, \chi) \\ &= -\frac{q-1}{12lq} + \frac{2}{lq^2} \sum_{v \in \mathfrak{B}} \left(\sum_{\chi \neq 1} \chi(sv) G(\bar{\chi}) \right) \varrho_2(v). \end{aligned}$$

Für ganzes, zu q teilerfremdes t werde

$$(5.18) \quad \alpha(t) = \sum_{v \bmod q} \exp \left\{ 2\pi i \frac{t}{q} v^l \right\}$$

gesetzt; ist t für q ganz und nicht durch q teilbar, $t \equiv t_0 \bmod q$, t_0 ganz, so werde $\alpha(t)$ durch $\alpha(t) = \alpha(t_0)$ erklärt. Dann gilt, wie man leicht beweist,

$$\sum_{\chi \neq 1} \chi(t) G(\bar{\chi}) = \alpha(t) \quad (t \text{ für } q \text{ ganz, } t \not\equiv 0 \bmod q),$$

und nun ergibt sich

$$\begin{aligned}\beta_{s^{-1}} - \beta_{s^{-1}t} &= \frac{2}{lq^2} \sum_{v \in \mathfrak{B}} \alpha(s^{-1}v) (\varrho_2(v) - \varrho_2(vt^{-1})) \\ &= \frac{2}{lq^2} \sum_{\substack{v \in \mathfrak{B} \\ v \neq 1}} (\alpha(s^{-1}v) - \alpha(st^{-1})) (\varrho_2(v) - \varrho_2(vt^{-1})).\end{aligned}$$

Dies besagt

Satz 14. Man definiere: Die Matrizen Ω_* , B_* durch (1.5), (3.5), (5.10); die algebraischen, in K enthaltenen Zahlen $\varrho_m(s)$ ($m=1, 2, \dots; s \in \mathfrak{B}$) durch (5.13, 16); die ganz-algebraischen, in K enthaltenen Zahlen $\alpha(t)$ durch (5.18) mit dem nachfolgenden Zusatz; die Matrizen A_* , P_{2*} durch

$$A_* = (\alpha(t^{-1}) - \alpha(st^{-1}))_*, \quad P_{2*} = (\varrho_2(t) - \varrho_2(s^{-1}t))_*,$$

wo $s, t \in \mathfrak{B}$, $s \neq 1 \neq t$ und s = Zeilen-, t = Spaltenindex. Dann gilt

$$B_* = -\frac{2}{lq^2} P_{2*} A_*,$$

und die Konstante C_1 aus Satz 12 hat den Wert

$$(5.19) \quad C_1 = -\frac{\pi}{lq} \sqrt{\frac{h}{6l} \left(1 - \frac{1}{q}\right)} \operatorname{Sp}(\Omega_*^{-1} P_{2*} A_*).$$

Im Falle $l=2$ folgt aus [5] (48) die formale Übereinstimmung der Relation (5.19) mit der entsprechenden in (PII) abgeleiteten Relation (PII) (5.8, 11), wenn diese mit den Werten $f^+ = f^- = 0$ gebildet wird; von analytisch bewiesenen Identitäten ist dabei lediglich die Klassenzahlformel $|\Omega_*| = hR$ anzuwenden.

Münster, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 27. Mai 1956)

NOETHERSche Gruppen

Von

REINHOLD BAER

Unter einer NOETHERschen Gruppe wollen wir eine Gruppe verstehen, von deren Untergruppen die Maximalbedingung [= Obergruppensatz] erfüllt wird; und diese Eigenschaft ist bekanntlich gleichwertig damit, daß alle Untergruppen endlich erzeugbar sind. Untergruppen und homomorphe Bilder NOETHERscher Gruppen sind NOETHERsch; und Erweiterungen NOETHERscher Gruppen durch NOETHERsche Gruppen sind ebenfalls NOETHERsch. Es folgt, daß alle endlich erzeugbaren abelschen Gruppen NOETHERsch sind. Andererseits gibt es bekanntlich einfachste Beispiele endlich erzeugbarer Gruppen, deren abelsche Kommutatorgruppe nicht endlich erzeugbar ist. Es ist also von Interesse, Gruppenklassen anzugeben, in denen aus endlicher Erzeugbarkeit auf den NOETHERschen Charakter geschlossen werden kann. Es ist das Ziel dieser Note, das folgende Kriterium dieser Art zu beweisen: Die Gruppe G ist NOETHERsch, wenn sie von endlich vielen Elementen erzeugt wird, und wenn jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G einen Normalteiler $N \neq 1$ besitzt, der endlich oder endlich erzeugbar und abelsch ist. Wir werden diesen Satz durch Spezialisierung aus allgemeineren Betrachtungen gewinnen, die wohl auch unabhängiges Interesse besitzen. Andererseits werden wir in spezielleren Situationen, besonders für nilpotente Gruppen, die so erhaltenen Resultate wesentlich verschärfen.

Definition 1. Die Gruppe G ist endlich definierbar, wenn es eine freie Gruppe F endlichen Ranges und einen von endlich vielen Klassen in F konjugierter Elemente erzeugbaren Normalteiler R von F mit zu G isomorpher Faktorgruppe $F/R \cong G$ gibt.

Dieses ist weiter nichts als eine für unsere Zwecke bequeme Formulierung des Sachverhalts, daß G durch endlich viele Erzeugende und Relationen definiert werden kann. Diese Formulierung hat den Vorteil, daß sie es unnötig macht, ein bestimmtes Erzeugendensystem mit einem zugehörigen Relationensystem zu paaren.

Die Klasse der endlich definierbaren Gruppen enthält so verschiedenartige Individuen wie die freien Gruppen endlichen Ranges und die endlichen Gruppen — die endlichen Gruppen sind endlich definierbar, da ja bekanntlich ein Normalteiler von endlichem Index in einer endlich erzeugbaren Gruppe selbst endlich erzeugbar ist. Da die freien Gruppen endlichen Ranges endlich definierbar sind, so ist es leicht, Beispiele zu konstruieren, die zeigen, daß Untergruppen und homomorphe Bilder endlich definierbarer Gruppen nicht endlich definierbar zu sein brauchen.

Für einige unserer Anwendungen reicht jedoch ein noch allgemeinerer Begriff aus.

Definition 2. Die Faktorgruppe G/N [der Gruppe G nach ihrem Normalteiler N] ist bezüglich G endlich definierbar, wenn eine Untergruppe U von G mit folgenden Eigenschaften existiert:

$G = NU$ und $N \cap U$ wird von endlich vielen Klassen in U konjugierter Elemente erzeugt.

Man überzeugt sich ohne Mühe, daß G/N sicher dann bezüglich G endlich definierbar ist, wenn G/N schlechthin endlich definierbar ist; vgl. unten Folgerung 1. Man bemerke, daß die Gruppe $H = H/1$ bezüglich H endlich definierbar ist.

Satz 1. Ist die Faktorgruppe G/N bezüglich der endlich erzeugbaren Gruppe G endlich definierbar, so wird N von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt.

Dieses Resultat ist eine leichte Erweiterung einer Bemerkung von PH. HALL [1; p. 421, (vi)].

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein endliches Erzeugendensystem E von G und eine Untergruppe U von G mit folgenden Eigenschaften:

$G = NU$ und $N \cap U$ wird von endlich vielen Klassen in U konjugierter Elemente erzeugt.

Es gibt also sicherlich endlich viele Klassen $K_1, \dots, K_k$ in G konjugierter Elemente derart, daß

$$N \cap U \leq \{K_1, \dots, K_k\} \leq N$$

ist. Weiter existiert zu jedem Element e in E ein Element e' in N derart, daß ee' zu U gehört. Es sei M der von den Klassen K_i und von den Klassen zu e' [für e aus E] in G konjugierter Elemente erzeugte Normalteiler von G . Da E und die Anzahl der Klassen K_i endlich sind, so wird M von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt; und es folgt aus unserer Konstruktion sofort, daß $M \leq N$ ist. Ist e in E , so ist e' in M und ee' in U , so daß also e zu MU gehört. Folglich wird $MU = G$. Weiter ist $N \cap U \leq M$, da ja die Klassen K_i zu M gehören. Aus dem DEDEKINDSchen Gesetz folgt schließlich:

$$N = M(N \cap U) = M;$$

und damit haben wir gezeigt, daß N von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt wird.

Folgerung 1. Die folgenden Eigenschaften der endlich erzeugbaren Gruppe G sind miteinander äquivalent.

(a) G ist endlich definierbar.

(b) Die Faktorgruppe H/N ist bezüglich H endlich definierbar, wenn $H/N \simeq G$ ist.

(c) Ist H endlich erzeugbar und $H/N \simeq G$, so wird N von endlich vielen Klassen in H konjugierter Elemente erzeugt.

Beweis. Ist zunächst G endlich definierbar, so existiert eine freie Gruppe F und ein von endlich vielen Klassen in F konjugierter Elemente erzeugbarer Normalteiler R von F mit zu G isomorpher Faktorgruppe F/R . Ist weiter N ein Normalteiler der Gruppe H mit zu G isomorpher Faktorgruppe H/N , so folgt aus der Freiheit von F und der Isomorphie $F/R \cong H/N$ die Existenz eines Homomorphismus σ von F in H , der einen Isomorphismus von F/R auf H/N induziert. Daraus folgt insbesondere, daß

$$H = NF^\sigma \quad \text{und} \quad R^\sigma = N \cap F^\sigma$$

ist. Da aber R von endlich vielen Klassen in F konjugierter Elemente erzeugt wird, so wird $R^\sigma = N \cap F^\sigma$ von endlich vielen Klassen in F^σ konjugierter Elemente erzeugt, d.h. H/N ist bezüglich H endlich definierbar. Damit ist gezeigt, daß (b) aus (a) folgt; und es ergibt sich aus Satz 1, daß (c) aus (b) folgt.

Schließlich werde (c) von G erfüllt. Da G endlich erzeugbar ist, so existiert eine freie Gruppe F endlichen Ranges mit zu G isomorpher Faktorgruppe F/R . Aus (c) folgt dann, daß R von endlich vielen Klassen in F konjugierter Elemente erzeugt wird. Also ist G endlich definierbar, d.h. (a) folgt aus (c), q. e. d.

Bemerkung. Ist H/N endlich definierbar und U eine endlich erzeugbare, $H = NU$ erfüllende Untergruppe, so ist $U/(N \cap U) \cong H/N$; und wir können aus Folgerung 1 erschließen, daß $N \cap U$ sich von endlich vielen Klassen in U konjugierter Elemente erzeugen läßt. Wir haben nicht entscheiden können, ob es genügt, die schwächere Annahme zu machen, daß H/N bezüglich H endlich definierbar sei.

Lemma 1. Ist N ein Normalteiler der endlich erzeugbaren Gruppe G und U eine endlich erzeugbare Untergruppe von G derart, daß NU ein Normalteiler von G ist, dann existiert ein in N enthaltener, von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugter Normalteiler M von G derart, daß MU ein Normalteiler von G ist.

Beweis. Es sei E ein endliches Erzeugendensystem von G und F ein endliches Erzeugendensystem von U . Ist x irgendein Element in G , so ist

$$x^{-1}Fx \leq x^{-1}NUx = NU,$$

da ja NU ein Normalteiler von G ist. Also gibt es zu jedem e in E und jedem f in F Elemente $(e, f)'$ und $(e, f)''$ in N derart, daß

$$e^{-1}fe(e, f)' \quad \text{und} \quad efe^{-1}(e, f)'' \quad \text{zu } U \text{ gehören.}$$

Es sei M der kleinste alle $(e, f)'$ und $(e, f)''$ [mit e in E und f in F] enthaltende Normalteiler von G . Da E und F endliche Mengen sind, so wird M von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt; und $M \leq N$, da ja alle $(e, f)'$ und $(e, f)''$ zu N gehören.

Da $(e, f)'$ zu M und $e^{-1}fe(e, f)'$ zu U gehört, so ist $e^{-1}fe$ in MU enthalten und $e^{-1}Fe \leq MU$; ebenso folgt $eFe^{-1} \leq MU$. Also wird

$$e^{-1}MUe = M\{e^{-1}Fe\} \leq MU, \quad eMUe^{-1} = M\{eFe^{-1}\} \leq MU;$$

und hieraus folgt $e^{-1}MUe = MU$ für jedes e in dem Erzeugendensystem E von G . Also ist MU ein Normalteiler von G , q. e. d.

Satz 2. Wenn G/N endlich definierbar bezüglich der endlich erzeugbaren Gruppe G ist, wenn M ein in N enthaltener Normalteiler von G ist, und wenn N/M endlich erzeugbar und bezüglich N endlich definierbar ist, dann wird M von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt.

Beweis. Da G endlich erzeugbar und G/N bezüglich G endlich definierbar ist, so wird N wegen Satz 1 von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt.

Da N/M bezüglich N endlich definierbar ist, so existiert eine Untergruppe U von N mit folgenden Eigenschaften:

$N = MU$ und $M \cap U$ wird von endlich vielen Klassen in U konjugierter Elemente erzeugt.

Es gibt also einen in M enthaltenen und $M \cap U$ enthaltenden Normalteiler K von G , der von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt wird.

Aus $U/(M \cap U) \simeq MU/M = N/M$ und der endlichen Erzeugbarkeit von N/M folgt die Existenz einer endlich erzeugbaren $U = (M \cap U)V$ erfüllenden Untergruppe V von G . Dann wird insbesondere

$$N = MU = M(M \cap U)V = MV.$$

Da G und V endlich erzeugbar und M und N Normalteiler von G sind, so folgt aus Lemma 1 die Existenz eines in M enthaltenen, von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugten Normalteilers L von G derart, daß LV ein Normalteiler von G ist.

Nach Konstruktion ist KL ein in M enthaltener Normalteiler von G , der von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt wird. Mit LV ist auch $KL V$ ein Normalteiler von G . Da $KL \leq M$ und $M \cap V \leq M \cap U \leq K$ ist, so wird

$$N = MV = M(KLV) \quad \text{und} \quad M \cap KLV = KL(M \cap V) = KL,$$

so daß also N/KL das direkte Produkt von M/KL und KLV/KL ist. Da aber N von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt wird, so wird auch der direkte Faktor M/KL von endlich vielen Klassen in G/KL konjugierter Elemente erzeugt. Damit ist aber gezeigt, daß M selbst von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt wird, q. e. d.

Folgerung 2. Erweiterungen endlich definierbarer Gruppen durch endlich definierbare Gruppen sind endlich definierbar.

Dies ergibt sich leicht aus Folgerung 1 und Satz 2. Für eine direkte Herleitung siehe etwa PH. HALL [1; p. 426, Lemma 1].

Hauptsatz. *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind untereinander äquivalent:*

(a) G ist NOETHERSCH.

(b) G ist endlich erzeugbar; und zu jedem Normalteiler $X \neq G$ von G existiert ein $X < Y$ erfüllender Normalteiler Y von G mit bezüglich Y endlich definierbarer NOETHERSCHER Faktorgruppe Y/X .

(c) Es gibt eine den folgenden Bedingungen genügende Gruppe Γ von Automorphismen von G :

(c') Jeder Γ -zulässige Normalteiler X von G mit NOETHERSCHER Faktorgruppe G/X wird von endlich vielen Klassen Γ -konjugierter Elemente erzeugt.

(c'') Zu jedem Γ -zulässigen Normalteiler $X \neq G$ von G existiert ein $X < Y$ erfüllender, Γ -zulässiger Normalteiler Y von G mit NOETHERSCHER Faktorgruppe Y/X .

Elemente x und x^σ mit x in G und σ in Γ werden als Γ -konjugiert bezeichnet; und $U = U^\Gamma$ erfüllende Untergruppen heißen Γ -zulässig.

Beweis. Man sieht sofort ein, daß (b) aus (a) folgt. — Gilt (b), so gilt gewiß auch:

(d'') Jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G besitzt einen NOETHERSCHEN Normalteiler $N \neq 1$.

Sei nun X ein Normalteiler von G mit NOETHERSCHER Faktorgruppe G/X . Wäre X nicht durch endlich viele Klassen in G konjugierter Elemente erzeugbar, so existierte ein maximaler, X enthaltender Normalteiler W von G , der nicht durch endlich viele Klassen in G konjugierter Elemente erzeugbar wäre. Da G wegen (b) endlich erzeugbar ist, so ist sicherlich $W < G$; und aus (b) folgt die Existenz eines $W < V$ erfüllenden Normalteilers V von G mit bezüglich V endlich definierbarer [NOETHERSCHER] Faktorgruppe V/W . Aus der Maximalität von W folgt, daß V von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt wird. Aus der endlichen Erzeugbarkeit von G folgt nun wegen Satz 2, daß W doch von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt wird. Dieser Widerspruch erweist die Gültigkeit folgender Tatsache:

(d') Normalteiler X mit NOETHERSCHER Faktorgruppe G/X werden von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt.

Die Eigenschaften (d') und (d'') besagen aber, daß (c) insbesondere von der Gruppe Γ der inneren Automorphismen von G erfüllt wird; und damit haben wir gezeigt, daß (c) aus (b) folgt.

Sei schließlich Γ irgendeine den Bedingungen (c') und (c'') genügende Gruppe von Automorphismen von G . Wäre G nicht NOETHERSCH, so wäre die Menge $\mathfrak{M}$ der Γ -zulässigen Normalteiler X mit nicht-NOETHERSCHER Faktorgruppe G/X nicht leer, da ja gewiß 1 zu $\mathfrak{M}$ gehörte. Sei $\mathfrak{A}$ eine natürlich

geordnete, nicht leere Teilmenge von $\mathfrak{M}$; dies bedeutet, daß für X und Y in $\mathfrak{X}$ stets $X \leq Y$ oder $Y < X$ ist. Wir bilden die Vereinigungsmenge V aller X in $\mathfrak{X}$. Da jedes X in $\mathfrak{X}$ ein Γ -zulässiger Normalteiler von G ist, so ist auch V ein Γ -zulässiger Normalteiler von G . Wäre V nicht in $\mathfrak{M}$, so wäre G/V NOETHERSCH; und es folgte aus (c'), daß V von endlich vielen Klassen $K_1, \dots, K_n$ von Γ -konjugierten Elementen erzeugt wird. Jedes Element aus V gehört zu einem X in $\mathfrak{X}$; und da X ein Γ -zulässiger Normalteiler von G ist, so enthält X mit irgendeinem Element die ganze Klasse zu ihm Γ -konjugierter Elemente. Also ist jede Klasse K_i in einem X_i aus $\mathfrak{X}$ enthalten; und da $\mathfrak{X}$ natürlich geordnet ist, so gibt es unter den endlich vielen Normalteilern $X_1, \dots, X_n$ aus $\mathfrak{X}$ einen umfassendsten W . Da W alle K_i enthält und in der von den K_i erzeugten Untergruppe V enthalten ist, so ist $W = V$; und da W zu $\mathfrak{X}$ gehört, so ist $G/V = G/W$ NOETHERSCH. Aus diesem Widerspruch folgt die Zugehörigkeit von V zu $\mathfrak{M}$; und dies zeigt die Anwendbarkeit des Maximumprinzips der Mengenlehre auf $\mathfrak{M}$. Also enthält $\mathfrak{M}$ einen maximalen Γ -zulässigen Normalteiler D . Da G/D nicht NOETHERSCH ist, so können wir aus (c'') die Existenz eines $D < H$ erfüllenden Γ -zulässigen Normalteilers H von G mit NOETHERSCHER Faktorgruppe H/D erschließen. Da D in $\mathfrak{M}$ maximal ist, so ist G/H NOETHERSCH; und da G/H und H/D NOETHERSCH sind, so ist auch G/D NOETHERSCH. Dies widerspricht der Tatsache, daß D zu $\mathfrak{M}$ gehört; und aus diesem Widerspruch folgt, daß G NOETHERSCH ist, q.e.d.

Bemerkung. Wir haben im Laufe des Beweises gezeigt, daß auch die Bedingungen (d') und (d'') zusammen notwendig und hinreichend dafür sind, daß G NOETHERSCH ist. Die Bedingung (d') ist gewiß erfüllt, wenn die Maximalbedingung von den Normalteilern von G erfüllt wird. Das sich so ergebende Kriterium ist aber recht oberflächlich.

Zusatz 1. Die folgenden Bedingungen sind notwendig und hinreichend dafür, daß der Normalteiler N der endlich erzeugbaren Gruppe G NOETHERSCH ist:

- (1) G/N ist bezüglich G endlich definierbar;
- (2) ist X ein in N enthaltener Normalteiler von G und N/X NOETHERSCH, so ist die Faktorgruppe N/X bezüglich N endlich definierbar;
- (3) zu jedem $X < N$ erfüllenden Normalteiler X von G gibt es einen $X < Y \leq N$ erfüllenden Normalteiler Y von G mit NOETHERSchem Y/X .

Beweis. Es genügt offenbar, das Hinreichen dieser drei Bedingungen zu erweisen; und um dies zu tun, werden wir zeigen, daß die Gruppe Γ der von Elementen aus G in N induzierten Automorphismen die Bedingungen (c') und (c'') des Hauptsatzes erfüllt. Es ist klar, daß (c'') mit unserer Bedingung (3) identisch ist. Sei also X ein in N enthaltener Normalteiler von G mit NOETHERSchem N/X . Nach (2) ist dann N/X bezüglich N endlich definierbar. Da aber G endlich erzeugbar und G/N nach (1) bezüglich G endlich definierbar ist, so folgt aus Satz 2, daß X von endlich vielen Klassen in G , d.h. Γ -konjugierter Elemente erzeugt wird. Also gilt auch (c'); und es folgt aus dem Hauptsatz, daß N NOETHERSCH ist.

Endlich definierbare NOETHERSCHE GRUPPEN. Diese Klasse enthält mit einer Gruppe G jedes homomorphe Bild von G , da ja die Normalteiler von G endlich erzeugbar sind; und sie enthält mit A und B auch jede Erweiterung von A durch B [Folgerung 2]. Aus dem Hauptsatz und Zusatz 1 leitet man mühelos die folgenden beiden Kriterien ab.

Zusatz 2. *Die folgenden Eigenschaften der endlich erzeugbaren Gruppe G sind untereinander äquivalent:*

- (a) G ist eine endlich definierbare NOETHERSCHE Gruppe.
- (b) Jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G besitzt einen endlich definierbaren NOETHERSCHEN Normalteiler $N \neq 1$.
- (c) Jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G besitzt einen NOETHERSCHEN Normalteiler $N \neq 1$; und jedes NOETHERSCHE homomorphe Bild von G ist endlich definierbar.

Zusatz 3. N ist dann und nur dann ein endlich definierbarer NOETHERSCHER Normalteiler der endlich definierbaren Gruppe G , wenn

- (1) G endlich erzeugbar und G/N endlich definierbar ist,
- (2) N/X endlich definierbar ist, wenn nur X ein in N enthaltener Normalteiler von G und N/X NOETHERSCH ist, und
- (3) zu jedem $X < N$ erfüllenden Normalteiler X von G ein $X < Y \leq N$ erfüllender Normalteiler Y von G mit NOETHERSCHER Faktorgruppe Y/X existiert.

Bei der Herleitung dieser Kriterien muß man noch berücksichtigen, daß der Normalteiler K von H von endlich vielen Klassen in H konjugierter Elemente erzeugt wird, wenn H endlich erzeugbar und H/K endlich definierbar ist [Folgerung 1].

Vollständig endlich definierbare Gruppen. Darunter wollen wir eine Gruppe verstehen, deren sämtliche Untergruppen endlich definierbar sind. Die Untergruppen einer solchen Gruppen sind dann insbesondere auch endlich erzeugbar, so daß derartige Gruppen NOETHERSCH sind. Man sieht dann ohne Mühe ein, daß Untergruppen und homomorphe Bilder vollständig endlich definierbarer Gruppen ebenfalls vollständig endlich definierbar sind.

Ist sowohl der Normalteiler N wie auch die Faktorgruppe G/N vollständig endlich definierbar, und ist weiter U eine Untergruppe von G , so ist $U/(U \cap N) \simeq NU/N$ als Untergruppe von G/N endlich definierbar; und $U \cap N$ ist als Untergruppe von N endlich definierbar. Nach Folgerung 2 ist also die Erweiterung U der endlich definierbaren Gruppe $U \cap N$ durch die endlich definierbare Gruppe $U/(U \cap N)$ ebenfalls endlich definierbar; und damit haben wir gezeigt, daß G vollständig endlich definierbar ist.

Die Formulierung, und Herleitung aus Zusatz 2 und 3, von Kriterien für vollständige Endliche Definierbarkeit sei dem Leser überlassen.

Definition 3. *Die Gruppe G ist fast-auflösbar, wenn jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G einen Normalteiler $N \neq 1$ mit endlicher Kommutatorgruppe N' besitzt.*

Ist $N \neq 1$ ein Normalteiler mit endlicher Kommutatorgruppe N' , so ist N' als charakteristische Untergruppe des Normalteilers N selbst ein Normalteiler. Ist $N' \neq 1$, so ist also N' ein endlicher, von 1 verschiedener Normalteiler; ist aber $N' = 1$, so ist N ein von 1 verschiedener abelscher Normalteiler.

Wir definieren die Ableitungen $X^{(i)}$ der Gruppe X wie üblich: $X^{(0)} = X$, $X^{(i+1)} = \text{Kommutatorgruppe von } X^{(i)}$.

Satz 3. *Die NOETHERSche Gruppe G ist dann und nur dann fast-auflösbar, wenn sie einen Normalteiler C derart besitzt, daß G/C endlich und $C^{(k)} = 1$ für hinreichend großes k ist.*

Weniger präzise, aber prägnanter läßt sich dieser Satz auch so ausdrücken: Die NOETHERSchen fast-auflösbaren Gruppen sind genau die endlichen Erweiterungen NOETHERScher auflösbarer Gruppen.

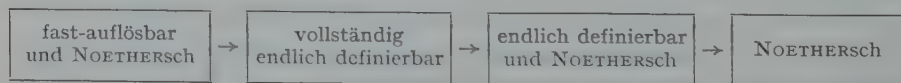
Einen Beweis von Satz 3 kann man leicht aus BAER [1; p. 149, Satz 1] herleiten; und man kann sogar zeigen, daß sich C stets als torsionsfreie charakteristische Untergruppe wählen läßt.

Aus Satz 3 folgt, daß die Klasse der fast-auflösbaren NOETHERSchen Gruppen mit einer Gruppe G jede Untergruppe und jedes homomorphe Bild von G enthält; und mit den Gruppen A und B enthält diese Gruppenklasse auch jede Erweiterung von A durch B .

Folgerung 3. *Jede fast-auflösbare NOETHERSche Gruppe ist endlich definierbar.*

Beweis. Fast-auflösbare NOETHERSche Gruppen besitzen nämlich endliche Normalketten, deren Faktoren zyklisch oder endlich sind. Da aber sowohl zyklische wie auch endliche Gruppen endlich definierbar sind, so folgt aus Folgerung 2 die endliche Definierbarkeit NOETHERScher fast-auflösbarer Gruppen.

Da jede Untergruppe einer NOETHERSchen fast-auflösbaren Gruppe ebenfalls NOETHERSche und fast-auflösbar ist, so sind alle NOETHERSchen fast-auflösbaren Gruppen vollständig endlich definierbar. Wir haben also die folgende Begriffshierarchie erhalten:



Ob alle diese vier Gruppenklassen verschieden sind, haben wir nicht entscheiden können.

Unter Benutzung der im Anschluß an Definition 3 gemachten Bemerkungen und von Folgerung 3 ergeben sich nun mühelos aus Zusatz 2 und 3 die beiden folgenden Kriterien.

Zusatz 4. *Die folgenden Eigenschaften der endlich erzeugbaren Gruppe G sind untereinander äquivalent:*

- (a) G ist NOETHERSCH und fast-auflösbar.
- (b) Jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G besitzt einen Normalteiler $N \neq 1$, der endlich oder endlich erzeugbar und abelsch ist.

(c) Jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G besitzt einen NOETHERschen Normalteiler $N \neq 1$; und jedes NOETHERsche homomorphe Bild von G ist fast-auflösbar.

Zusatz 5. N ist dann und nur dann ein NOETHERscher fast-auflösbarer Normalteiler der endlich definierbaren Gruppe G , wenn

- (1) G endlich erzeugbar und G/N endlich definierbar ist,
- (2) NOETHERsche Faktorgruppen N/X nach [in N enthaltenen] Normalteilern X von G stets fast-auflösbar sind, und
- (3) zu jedem $X < N$ erfüllenden Normalteiler X von G ein $X < Y \leq N$ erfüllender Normalteiler Y von G mit NOETHERscher Faktorgruppe Y/X existiert.

Ist F die freie Gruppe vom Range 2 und $G = F/F''$, so ist die Kommutatorgruppe G' von G bekanntlich eine freie abelsche Gruppe unendlichen Ranges. G ist also endlich erzeugbar und auflösbar, ohne NOETHERsch zu sein; und dies zeigt die Unentbehrlichkeit der ersten Hälfte der Bedingung (c) von Zusatz 4. — Jede abelsche Gruppe genügt der Bedingung (c) von Zusatz 4 und dies zeigt die Unentbehrlichkeit der Annahme, daß G endlich erzeugbar sei.

Überauflösbare Gruppen. Dies sind Gruppen, deren von 1 verschiedene homomorphe Bilder von 1 verschiedene zyklische Normalteiler besitzen. Derartige Gruppen genügen natürlich der Bedingung (b) des Zusatz 4, so daß also endlich erzeugbare überauflösbare Gruppen notwendig NOETHERsch sind. Zusatz 4 stellt folglich eine Verallgemeinerung von BAER [2; p. 26, Theorem 1] dar.

Überauflösbar eingebettete Normalteiler. Der Normalteiler N von G ist überauflösbar in G eingebettet, wenn es zu jedem $X < N$ erfüllenden Normalteiler X von G einen $X < Y \leq N$ erfüllenden Normalteiler Y von G mit zyklischer Faktorgruppe Y/X gibt. Es ist nicht schwer einzusehen, daß überauflösbar eingebettete Normalteiler stets auch überauflösbare Gruppen sind. Jeder überauflösbar eingebettete Normalteiler N der Gruppe G genügt also den Bedingungen (2) und (3) des Zusatz 5, ist mithin sicher NOETHERsch, wenn G endlich erzeugbar und G/N endlich definierbar ist.

Oberhyperzentrale Normalteiler. Der Normalteiler N von G ist oberhyperzentral, wenn $(N/X) \cap Z(G/X) \neq 1$ für jeden $X < N$ erfüllenden Normalteiler X von G gilt; siehe etwa BAER [3; p. 299, Definition 1]. Hier sei, wie immer, unter $Z(H)$ das Zentrum der Gruppe H verstanden. Oberhyperzentrale Normalteiler sind gewiß überauflösbar eingebettet. Ein oberhyperzentraler Normalteiler N der endlich erzeugbaren Gruppe G mit endlich definierbarer Faktorgruppe G/N ist also sicher NOETHERsch; und dies ist eine Verschärfung eines Resultats von PH. HALL [1; p. 427, Lemma 2].

Endlichkeitskriterium für oberhyperzentrale Normalteiler. Der oberhyperzentrale Normalteiler N der Gruppe G ist [dann und nur dann] endlich, wenn N NOETHERsch und $N/[G, N]$ endlich ist.

Wie üblich werde hier unter $[G, N]$ die von allen Kommutatoren $g^{-1}n^{-1}gn$ mit g in G und n in N erzeugte Untergruppe von G verstanden. Mit N ist natürlich auch $[G, N]$ ein in N enthaltener Normalteiler von G .

Beweis. Sei N ein unendlicher, NOETHERScher und oberhyperzentraler Normalteiler der Gruppe G . Dann existiert ein maximaler in N enthaltener Normalteiler K von G mit unendlicher Faktorgruppe N/K . Wir setzen $G^* = G/K$ und $N^* = N/K$. Die Elemente endlicher Ordnung in N^* bilden einen endlichen Normalteiler T von G^* , der in N^* liegt; s. etwa BAER [5; p. 193, Theorem 1, (v)]. Wäre $T \neq 1$, so würde aus der Maximalität von K die Endlichkeit von N^*/T folgen, was unmöglich ist, da ja N^* unendlich, T aber endlich ist. Mithin ist N^* torsionsfrei. Ist C der Zentralisator von N^* in G^* , so folgt aus der Torsionsfreiheit des oberhyperzentralen Normalteilers N^* von G^* die Torsionsfreiheit von G^*/C ; s. BAER [5; p. 200, Proposition 1]. Also ist auch N^*C/C torsionsfrei und daraus folgt die Torsionsfreiheit der isomorphen Gruppe $N^*/(N^* \cap C)$. Da C das Zentrum von G^* enthält, und da N^* von 1 verschiedene Zentrumselemente von G^* enthält, so ist $N^* \cap C \neq 1$. Aus der Maximalität von K folgt wieder die Endlichkeit der torsionsfreien Gruppe $N^*/(N^* \cap C)$. Also ist $N^*/(N^* \cap C) = 1$. Mithin ist $N^* = N^* \cap C$ und also auch N^* Teil seines Zentralisators. Damit haben wir gezeigt, daß N^* eine freie abelsche Gruppe endlichen Ranges ist.

Da N^* ein unendlicher oberhyperzentraler Normalteiler von G^* ist, so ist $N^* \cap Z(G^*) \neq 1$. Sei $z \neq 1$ ein Element aus $N^* \cap Z(G^*)$. Dann ist $\{z\}$ ein Normalteiler von G^* ; und wir folgern aus der Maximalität von K die Endlichkeit von $N^*/\{z\}$. Da aber N^* eine freie abelsche Gruppe endlichen Ranges ist, so muß N^* sogar eine unendliche zyklische Gruppe sein. Durch direktes Nachrechnen oder durch Anwendung von BAER [5; p. 201, Corollary 2] ergibt sich schließlich, daß $N^* \leq Z(G^*)$ ist. Dies ist aber äquivalent mit der Aussage $[N, G] \leq K$, so daß aus der Unendlichkeit von N/K auch die von $N/[N, G]$ folgt, q. e. d.

NOETHERSche Gruppen endlicher Klasse. Wie üblich seien die Glieder ${}^iG$ der absteigenden Zentrenkette der Gruppe G induktiv durch die Gleichungen

$${}^0G = G, \quad {}^{i+1}G = [G, {}^iG]$$

definiert; und die Gruppe G heiße von endlicher Klasse, wenn ${}^nG = 1$ für hinreichend großes positives n gilt.

Kriterium für endlich erzeugbare Gruppen. Die folgenden Eigenschaften der endlich erzeugbaren Gruppe G sind miteinander äquivalent:

- (a) G ist eine NOETHERSche Gruppe endlicher Klasse.
- (b) Ist $H \neq 1$ ein homomorphes Bild von G , so ist $Z(H) \neq 1$.
- (c) Jedes NOETHERSche homomorphe Bild von G ist von endlicher Klasse; und jedes homomorphe Bild $H \neq 1$ von G besitzt einen NOETHERSchen Normalteiler $N \neq 1$.

(d) *Endliche homomorphe Bilder von G sind nilpotent; minimale Normalteiler homomorpher Bilder von G sind endlich; und die absteigende Zentrenkette von G bricht nach endlich vielen Schritten ab.*

Beweis. Die Äquivalenz von (a), (b) und (c) leitet man mühelos aus Zusatz 4 her; vgl. auch BAER [5; p. 203, Theorem und p. 207, Corollary]. Ebenso ist es klar, daß (d) aus (a) folgt.

Gilt (d), so gibt es sicher eine " $G = {}^{n+1}G$ " erfüllende ganze Zahl n . Dann ist $G/{}^nG$ eine endlich erzeugbare Gruppe endlicher Klasse und eine solche ist gewiß NOETHERSCH, wie etwa aus der Äquivalenz von (a) und (b) folgt. Wäre nun $N = {}^nG \neq 1$, so bemerkten wir zunächst, daß G/N als NOETHERSCHE Gruppe endlicher Klasse auch endlich definierbar ist [Folgerung 3]. Da aber G endlich erzeugbar ist, so ergibt sich aus Folgerung 1, daß N von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt wird. Hieraus und aus $N \neq 1$ erschließen wir die Existenz eines maximalen $K < N$ erfüllenden Normalteilers K von G . Dann ist aber N/K ein minimaler Normalteiler von G/K ; und daraus folgt wegen (d) die Endlichkeit von N/K . Sei C/K der Zentralisator von N/K in G/K . Dann ist C ein Normalteiler von G und G/C ist im wesentlichen mit der Gruppe der von G in N/K induzierten Automorphismen von N/K identisch. Aus der Endlichkeit von N/K folgt die Endlichkeit von G/C . Weiter ist $(N \cap C)/K \leq Z(C/K)$ und $C/(N \cap C) \cong NC/N$ ist als Untergruppe von G/N eine NOETHERSCHE Gruppe endlicher Klasse. Also ist auch C/K eine NOETHERSCHE Gruppe endlicher Klasse. Eine solche Gruppe besitzt aber bekanntlich eine torsionsfreie Untergruppe U/K , deren Index $[C:U]$ endlich ist; s. etwa BAER [3; p. 307, Zusatz 3]. Aus der Endlichkeit von $[G:C]$ und der von $[C:U]$ folgt die Endlichkeit von $[G:U]$. Da U insbesondere nur endlich viele konjugierte in G besitzt, so folgt aus dem POINCARÉschen Satz die Endlichkeit von $[G:V]$, wenn wir unter V den Durchschnitt aller zu U in G konjugierten Untergruppen verstehen. Es ist klar, daß V ein K enthaltender Normalteiler von G ist, und daß V/K als Untergruppe von U/K torsionsfrei ist. Aus der Endlichkeit von N/K folgt dann $N \cap V = K$. Aus (d) und der Endlichkeit von G/V folgt die Nilpotenz von G/V . Da N/K ein minimaler Normalteiler von G/K ist, und da $VN/V \cong N/(N \cap V) = N/K$ ist, so ist VN/V ein minimaler Normalteiler der endlichen nilpotenten Gruppe G/V . Daraus folgt aber $VN/V \leq Z(G/V)$; und dies ist mit der Ungleichung

$${}^{n+1}G = [G, N] \leq N \cap V = K < N = {}^nG = {}^{n+1}G$$

äquivalent, die einen offenbaren Widerspruch darstellt. Also ist " $G = 1$ ", womit erwiesen ist, daß G eine NOETHERSCHE Gruppe endlicher Klasse ist, q. e. d.

Beispiel. Es sei A eine $A = A^p$ erfüllende abelsche unendliche p -Gruppe; man kann etwa für A irgendeine Gruppe vom PRÜFERSchen Typ p^∞ wählen. Abbildung eines jeden Elements in A auf seine $(1+p)$ -te Potenz ist ein Automorphismus von A . Sei nun G die aus A durch Adjunktion eines

Elements g entstehende Gruppe, das der Bedingung

$$g^{-1}ag = a^{1+p} \quad \text{für jedes } a \text{ in } A$$

genüge. Dann ist A ein Normalteiler von G , G/A eine unendliche zyklische Gruppe und $A = [A, G] = [G, G] = {}^1G = {}^2G$. Man überzeugt sich nun ohne Mühe, daß G den Bedingungen (b), (c) und (d) genügt, ohne NOETHERSCH oder von endlicher Klasse zu sein. Man sieht damit, daß die Annahme der endlichen Erzeugbarkeit von G für die Gültigkeit unseres Satzes unentbehrlich ist. — Es sei bemerkt, daß man dieses Beispiel leicht modifizieren kann; z.B. kann man erreichen, daß die Gruppe G entweder torsionsfrei oder eine Torsionsgruppe ist.

Bemerkung. Es ist bekannt, daß eine NOETHERSCHE Gruppe dann und nur dann von endlicher Klasse ist, wenn alle ihre echten Untergruppen von ihren Normalisatoren verschieden sind; s. HIRSCH [1]. Aus dem obigen Kriterium folgt also, daß die Gruppe G dann und nur dann NOETHERSCH und von endlicher Klasse ist, wenn sie der folgenden Bedingung genügt:

G ist endlich erzeugbar; jedes homomorphe Bild $H \neq 1$ von G besitzt einen NOETHERSCHEN Normalteiler $N \neq 1$; jede echte Untergruppe von G ist von ihrem Normalisator in G verschieden.

Die Eigenschaft (b) des obigen Kriteriums haben wir anderwärts als Obernilpotenz bezeichnet. Wir wollen noch die folgende Abschwächung dieser Eigenschaft untersuchen:

(E) Ist $N \neq 1$ ein Normalteiler des homomorphen Bildes H einer Untergruppe von G , so gibt es zu jedem Element x aus H ein $xy = yx$ erfüllendes Element $y \neq 1$ in N .

Obernilpotente wie auch ENGELSche Gruppen haben diese Eigenschaft (E); und eine endliche Gruppe ist dann und nur dann nilpotent, wenn sie der Bedingung (E) genügt; s. BAER [4; p. 407, Satz 4]. Weiter ist es klar, daß jede Untergruppe und jedes homomorphe Bild einer Gruppe mit der Eigenschaft (E) ebenfalls diese Eigenschaft (E) hat. Mangels eines besseren Namens seien diese Gruppen als E-Gruppen bezeichnet. Man bemerke, daß G dann und nur dann eine E-Gruppe ist, wenn jedes Elementepaar aus G eine E-Untergruppe erzeugt.

Endlichkeitskriterium für E-Normalteiler. *Der Normalteiler N der Gruppe G ist endlich, wenn N eine NOETHERSCHE Torsionsgruppe mit der Eigenschaft (E) ist, und wenn für jeden Homomorphismus σ von G jeder minimale, in N^σ enthaltene Normalteiler von G^σ endlich ist.*

Beweis. Wäre die NOETHERSCHE Gruppe N unendlich, so existierte ein maximaler, in N enthaltener Normalteiler K von G mit unendlicher Faktorgruppe N/K . Dann ist $N^* = N/K$ ein Normalteiler von $G^* = G/K$ mit folgenden Eigenschaften:

N^* ist eine unendliche NOETHERSCHE Torsionsgruppe mit der Eigenschaft (E); und jeder von 1 verschiedene, in N^* enthaltene Normalteiler X von G^* hat endlichen Index in N^* . Da aber endliche E-Gruppen nilpotent

sind, so ist eine solche Faktorgruppe N^*/X sogar eine endliche nilpotente Gruppe.

Da endlich erzeugbare Torsionsgruppen endlicher Klasse bekanntlich endlich sind — s. etwa BAER [5; p. 207, Corollary] — so ist insbesondere $N^*/{}^iN^*$ für jedes i endlich. Aus der Unendlichkeit der NOETHERSchen Gruppe N^* folgern wir die Unendlichkeit eines jeden ${}^iN^*$ und die Existenz eines maximalen, $K < {}^iN^*$ erfüllenden Normalteilers K von G^* . Bedenken wir, daß ${}^iN^*$ als charakteristische Untergruppe von N^* ein Normalteiler von G^* ist, so sehen wir, daß ${}^iN^*/K$ ein minimaler, in N^*/K enthaltener Normalteiler von G^*/K ist. Ein solcher ist aber nach Voraussetzung endlich. Aus der Endlichkeit von $N^*/{}^iN^*$ und der von ${}^iN^*/K$ folgt die Endlichkeit von N^*/K . Endliche E-Gruppen sind, wie schon bemerkt, nilpotent. Also gibt es eine ganze Zahl j derart, daß ${}^iN^* \leq K < {}^iN^*$ gilt. Damit ist insbesondere gezeigt, daß ${}^{i+1}N^* < {}^iN^*$ für jedes i gilt, und daß also die absteigende Zentrenkette von N^* nicht nach endlich vielen Schritten abbricht. Insbesondere ist also $N^*/\bigcap_{i=0}^{\infty} {}^iN^*$ unendlich, woraus sich sofort $\bigcap_{i=0}^{\infty} {}^iN^* = 1$ ergibt.

Wir werden jetzt [durch vollständige Induktion] eine Elementenfolge b_i mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

- (1) b_i ist von 1 verschieden und liegt in ${}^iN^*$;
- (2) $b_i b_j = b_j b_i$;
- (3) ist C_i der Zentralisator von $B_i = \{b_0, \dots, b_i\}$ in N^* , so ist $C_i \cap {}^iN^* \neq 1$ für jedes j .

Da N^* der Bedingung (E) genügt, und da alle ${}^iN^*$ unendlich sind, können wir als b_0 irgendein von 1 verschiedenes Element in der unendlichen Gruppe N^* wählen; und wir können also die Induktionsannahme machen, daß für ein gewisses i bereits den Bedingungen (1) bis (3) genügende Elemente $b_0, \dots, b_i$ konstruiert sind. Da B_i wegen (2) abelsch ist, so ist B_i in seinem Zentralisator C_i enthalten. Aus (3) folgt insbesondere, daß $C_i \cap {}^{i+1}N^* \neq 1$ ist; und es gibt also ein Element $b_{i+1} \neq 1$ in $C_i \cap {}^{i+1}N^*$. Es ist klar, daß die Elemente $b_0, \dots, b_{i+1}$ den Bedingungen (1) und (2) genügen. Weiter ist der Zentralisator C_{i+1} von $B_{i+1} = \{B_i, b_{i+1}\}$ in N^* genau gleich dem Zentralisator von b_{i+1} in C_i . Da aber $C_i \cap {}^iN^*$ wegen (3) ein von 1 verschiedener Normalteiler der E-Gruppe C_i ist [die ja eine Untergruppe der E-Gruppe N^* ist], so enthält $C_i \cap {}^iN^*$ von 1 verschiedene, mit dem Element b_{i+1} in C_i vertauschbare Elemente. Also ist $C_{i+1} \cap {}^iN^* \neq 1$, womit auch die Gültigkeit von (3) dargetan ist. Damit ist die induktive Konstruktion der Elementenfolge $b_0, \dots, b_i, b_{i+1}, \dots$ beendet.

Die von allen Elementen b_i erzeugte Untergruppe B von N^* ist wegen (2) abelsch. Da N^* eine NOETHERSCHE Torsionsgruppe ist, so ist B sogar endlich. Die absteigende Folge von Untergruppen $B \cap {}^iN^*$ von B bricht also nach endlich vielen Schritten ab, so daß es eine

$$B \cap {}^k N^* = \dots = B \cap {}^{k+i} N^* = \dots$$

erfüllende ganze Zahl k gibt. Dann wird $B \cap {}^k N^* \leq \bigcap_{i=0}^{\infty} {}^i N^* = 1$. Nach (1) ist aber $b_k \neq 1$ in $B \cap {}^k N^* = 1$ enthalten. Damit sind wir zu einem Widerspruch geführt worden, aus dem die Endlichkeit von N folgt, q. e. d.

Bemerkung. Ist G eine NOETHERSCHE Gruppe, deren Elementepaare endliche p -Untergruppen erzeugen, so ist G gewiß eine Torsionsgruppe mit der Eigenschaft (E). Die Frage, ob eine solche Gruppe G endlich ist, ist eine Variante des berühmten BURNSIDESchen Problems. Es besteht also ein enger Zusammenhang zwischen der BURNSIDESchen Vermutung und der Frage, ob die letzte der Bedingungen unseres Endlichkeitskriteriums für E-Normalteiler entbehrlich ist oder nicht.

Kriterion für NOETHERSCHE Gruppen. *Die folgenden Eigenschaften der NOETHERSchen Gruppe G sind miteinander äquivalent:*

(A) G ist von endlicher Klasse.

(B) G ist eine E-Gruppe; und der Normalteiler N des homomorphen Bildes H von G ist endlich, wenn nur $N/[N, H]$ endlich ist.

(C) G ist eine E-Gruppe; der Normalteiler N des homomorphen Bildes H von G ist eine Torsionsgruppe, wenn nur $N/[N, H]$ endlich ist; und minimale Normalteiler homomorpher Bilder von G sind endlich.

Beweis. Wir haben mehrfach darauf hingewiesen, daß Gruppen endlicher Klasse die Eigenschaft (E) haben; und es ergibt sich nun aus dem Endlichkeitskriterium für oberhyperzentrale Normalteiler, daß (B) aus (A) folgt.

Hat weiter G die Eigenschaft (B) und ist M ein minimaler Normalteiler des homomorphen Bildes H von G , so ist $[H, M]$ als in M enthaltener Normalteiler von H entweder gleich 1 oder gleich M . Im ersten Falle liegt M im Zentrum von H ; und aus der Minimalität von M folgt, daß M zyklisch von Primzahlordnung ist. Im zweiten Falle ist $M/[H, M] = 1$; und die Endlichkeit von M folgt aus (B). Wir sehen also, daß (C) aus (B) folgt.

Sei weiter die Bedingung (C) von G erfüllt und N ein Normalteiler des homomorphen Bildes H von G derart, daß $N/[N, H]$ endlich ist. Da G eine NOETHERSCHE E-Gruppe ist, so ist auch N eine NOETHERSCHE E-Gruppe; und aus (C) und der Endlichkeit von $N/[N, H]$ folgern wir, daß N eine Torsionsgruppe ist. Da schließlich minimale Normalteiler homomorpher Bilder von G wegen (C) endlich sind, so sind alle Voraussetzungen des Endlichkeitskriteriums für E-Normalteiler erfüllt. Also ist N endlich; und wir haben gezeigt, daß (B) eine Folge von (C) ist; und damit ist sogar die Äquivalenz von (B) und (C) erwiesen.

Erfülle schließlich G die äquivalenten Bedingungen (B) und (C). Da endliche E-Gruppen, wie schon früher bemerkt, nilpotent sind, so sind alle endlichen homomorphen Bilder von G nilpotent; und die Endlichkeit minimaler Normalteiler homomorpher Bilder von G ist in (C) enthalten. Um zu zeigen, daß die absteigende Zentrenreihe von G nach endlich vielen Schritten abbricht, definieren wir die folgende absteigende Kette charakteristischer Untergruppen $G(i)$ von G :

$$G(0) = G;$$

$G(i+1)/[G, G(i)]$ ist die von den Elementen endlicher Ordnung in $G/[G, G(i)]$ erzeugte Untergruppe von $G/[G, G(i)]$.

Durch eine naheliegende Induktion folgt zunächst, daß

$${}^iG \leq G(i) \quad \text{für jedes } i$$

gilt. Da also $G/G(i)$ von endlicher Klasse ist und $G(i)/[G, G(i)]$ im Zentrum von $G/[G, G(i)]$ liegt, so ist jede Faktorgruppe $G/[G, G(i)]$ NOETHERSCH und von endlicher Klasse. Die Elemente endlicher Ordnung in einer NOETHERschen Gruppe endlicher Klasse bilden aber bekanntlich eine endliche Untergruppe; s. etwa BAER [5; p. 207, Corollary]. Folglich ist $G(i+1)/[G, G(i)]$ stets eine endliche Gruppe, woraus insbesondere die Torsionsfreiheit der Faktorgruppen $G/G(i)$ folgt. Da $G/G(i)$ torsionsfrei und $G(i+1)/[G, G(i)]$ endlich ist, so ergibt sich schließlich noch $G(i+1) \leq G(i)$.

Wir wollen zunächst zeigen, daß die absteigende Kette der $G(i)$ nach endlich vielen Schritten abbricht. Wir nehmen an, daß dies nicht der Fall ist; und setzen $G(i)^* = G(i) / \bigcap_{j=0}^{\infty} G(j)$, insbesondere $G^* = G(0)^*$. Es ist dann klar, daß

$G^*/G(i)^*$ eine torsionsfreie Gruppe endlicher Klasse und

$$[G^*, G(i)^*] \leq G(i+1)^* < G(i)^*$$

für $i=0, 1, \dots$ ist. Weiter werden wir [durch vollständige Induktion] eine Elementenfolge b_i mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

(1) b_i ist von 1 verschieden und liegt in $G(i)^*$;

(2) $b_i b_j = b_j b_i$;

(3) ist C_i der Zentralisator von $B_i = \{b_0, \dots, b_i\}$ in G^* , so ist $C_i \cap G(j)^* \neq 1$.

Da G^* der Bedingung (E) genügt, und da jedes $G(i)^* \neq 1$ ist, können wir als b_0 irgendein von 1 verschiedenes Element in $G^* \neq 1$ wählen; und wir können also die Induktionsannahme machen, daß für ein gewisses k bereits den Bedingungen (1) bis (3) genügende Elemente $b_0, \dots, b_k$ konstruiert sind. Da B_k wegen (2) abelsch ist, so ist B_k in seinem Zentralisator C_k enthalten. Aus (3) folgt insbesondere $C_k \cap G(k+1)^* \neq 1$, so daß es also sicher ein Element $b_{k+1} \neq 1$ in $C_k \cap G(k+1)^*$ gibt. Es ist klar, daß die Elemente $b_0, \dots, b_{k+1}$ den Bedingungen (1) und (2) genügen. Weiter ist der Zentralisator C_{k+1} von $B_{k+1} = \{b_0, \dots, b_{k+1}\}$ in G^* genau gleich dem Zentralisator von b_{k+1} in C_k . Da aber $C_k \cap G(j)^*$ wegen (3) ein von 1 verschiedener Normalteiler von C_k ist, da b_{k+1} in C_k liegt, und da C_k als Untergruppe eines homomorphen Bildes von G eine E-Gruppe ist, so enthält $C_k \cap G(j)^*$ von 1 verschiedene, mit b_{k+1} vertauschbare Elemente. Also ist $C_{k+1} \cap G(j)^* \neq 1$, womit auch die Gültigkeit von (3) dargetan ist. Damit ist die induktive Konstruktion der Elementenfolge $b_0, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots$ vollständig ausgeführt.

Die von allen Elementen b_i erzeugte Untergruppe B ist wegen (2) abelsch; und aus (1) folgern wir

$$B \cap G(i)^* \neq 1 \quad \text{für jedes } i.$$

Da G NOETHERsch ist, so ist B endlich erzeugbar. Da $G^*/G(i)^*$ torsionsfrei ist, so ist auch $G(i)^*B/G(i)^* \simeq B/[B \cap G(i)^*]$ torsionsfrei. Da endlich erzeugbare torsionsfreie abelsche Gruppen freie abelsche Gruppen endlichen Ranges sind, und da eine Untergruppe einer abelschen Gruppe sicher dann ein direkter Faktor ist, wenn ihre Faktorgruppe eine freie abelsche Gruppe ist, so bilden die Untergruppen $B \cap G(i)^*$ eine absteigende Folge direkter Faktoren der endlich erzeugbaren abelschen Gruppe B . Eine solche bricht aber nach endlich vielen Schritten ab, so daß es eine

$$B \cap G(h)^* = \dots = B \cap G(h+j)^* = \dots$$

erfüllende ganze Zahl h gibt. Dann ist aber

$$1 < B \cap G(h)^* \leq \bigcap_{i=0}^{\infty} G(i)^* = 1,$$

wie aus der Konstruktion von G^* folgt; und damit sind wir auf einen Widerspruch geführt worden, aus dem folgt, daß die absteigende Kette der $G(i)$ nach endlich vielen Schritten abbricht.

Es gibt also eine $G(n) = G(n+1)$ erfüllende ganze Zahl n . Daraus folgt, daß $G(n)/[G, G(n)] = G(n+1)/[G, G(n)]$ endlich ist; und aus (B) ergibt sich die Endlichkeit von $G(n)$. Da aber " $G \leq G(n)$ " ist, so ergibt sich aus der Endlichkeit von $G(n)$, daß die absteigende Zentrenkette von G nach endlich vielen Schritten abbricht. Damit haben wir gezeigt, daß die NOETHERsche Gruppe G der Bedingung (d) des Kriteriums für endlich erzeugbare Gruppen genügt. Also ist G von endlicher Klasse, womit die Äquivalenz unserer Bedingungen (A), (B), (C) dargetan ist.

Endliche Gruppen. Ist G eine endlich erzeugbare Gruppe, deren unendliche homomorphe Bilder stets von 1 verschiedene, endliche Normalteiler besitzen, so ist G wegen Zusatz 4 NOETHERsch; und hieraus leitet man ohne weiteres die Endlichkeit von G her. Siehe auch BAER [5; p. 435, Lemma 1].

Produkte NOETHERscher Normalteiler. Dieser Begriff führt zu einer leichten Verallgemeinerung der schon gewonnenen Resultate und eröffnet auch einen neuen Zugang zu Zusatz 2 und 3.

Lemma 2. *N ist dann und nur dann ein Produkt NOETHERscher Normalteiler von G , wenn jede endliche Teilmenge von N in einem NOETHERschen Normalteiler von G enthalten ist.*

Beweis. Da Erweiterungen NOETHERscher Gruppen durch NOETHERsche Gruppen wieder NOETHERsche Gruppen sind, so ist insbesondere das Produkt zweier NOETHERscher Normalteiler von G wieder ein NOETHERscher Normalteiler von G . Es folgt, daß jedes Produkt endlich vieler NOETHERscher Normalteiler von G ebenfalls ein NOETHERscher Normalteiler von G ist. Aus dieser Tatsache folgt ohne weiteres unser Lemma.

Satz 4. *Ist M ein Produkt NOETHERscher Normalteiler der endlich erzeugbaren Gruppe G und N/M ein Produkt endlich definierbarer NOETHERscher Normalteiler von G/M , so ist N ein Produkt NOETHERscher Normalteiler von G .*

Beweis. Es sei K ein M enthaltender Normalteiler von G und K/M eine endlich definierbare NOETHERSche Gruppe. Dann existiert gewiß eine $K = MU$ erfüllende endlich erzeugbare Untergruppe U von G . Da $U/(M \cap U) \cong MU/M = K/M$ und also endlich definierbar ist, so ergibt sich aus Folgerung 1, daß $M \cap U$ von endlich vielen Klassen in U konjugierter Elemente erzeugt wird. Da nach Lemma 2 jede endliche Teilmenge von M in einem NOETHERSchen Normalteiler von G enthalten ist, und da Normalteiler von G volle Klassen in U konjugierter Elemente enthalten, so existiert ein NOETHERScher, $M \cap U$ enthaltender Normalteiler von G . Also ist insbesondere $M \cap U$ NOETHERSch. Da weiter $U/(M \cap U) \cong K/M$ und also nach Voraussetzung NOETHERSch ist, so ist U selbst NOETHERSch.

Da G und U endlich erzeugbar sind, und da M und $K = MU$ Normalteiler von G sind, so existiert nach Lemma 1 ein in M enthaltener, von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugter Normalteiler V von G derart, daß VU ein Normalteiler von G ist. Da aber nach Lemma 2 jede endliche Teilmenge von M in einem NOETHERSchen Normalteiler von G enthalten ist, der natürlich mit jedem Element alle zu ihm in G konjugierten Elemente enthält, so ist auch V in einem NOETHERSchen Normalteiler von G enthalten. Folglich ist V selbst ein NOETHERScher Normalteiler von G .

Da V ein NOETHERScher Normalteiler von G und U eine NOETHERSche Untergruppe ist, so ist VU ein NOETHERScher Normalteiler von G . Aus $K = MU = M(VU)$ folgt nun, daß K ein Produkt NOETHERScher Normalteiler von G ist, da ja dasselbe von M gilt.

Nach Voraussetzung ist aber N ein Produkt von M enthaltenden Normalteilern X von G mit endlich definierbarer NOETHERScher Faktorgruppe X/M . Nach dem eben Gezeigten ist jedes derartige X ein Produkt NOETHERScher Normalteiler von G , so daß also N ebenfalls ein Produkt NOETHERScher Normalteiler von G ist, q. e. d.

Bemerkung 1. Das Zentrum einer Gruppe ist ein Produkt zyklischer Normalteiler dieser Gruppe; und zyklische Gruppen sind endlich definierbare NOETHERSche Gruppen. Ist also M im Zentrum von G und N/M im Zentrum von G/M enthalten, so sind die Voraussetzungen von Satz 4 mit eventueller Ausnahme der endlichen Erzeugbarkeit von G erfüllt. Es ist aber leicht, Beispiele [nicht endlich erzeugbarer] Gruppen anzugeben, deren zweites Zentrum nicht ein Produkt NOETHERScher Normalteiler ist. Die Annahme der endlichen Erzeugbarkeit von G ist also unentbehrlich für die Gültigkeit von Satz 4.

Bemerkung 2. Man kann leicht Beispiele endlich erzeugbarer Gruppen angeben, deren Zentrum nicht endlich erzeugbar ist. Ist etwa F die freie Gruppe vom Range zwei und $[F, F']$ die von allen Kommutatoren $a^{-1}b^{-1}ab$ mit a in F und b in F' erzeugte charakteristische Untergruppe von F , so ist $G = F/[F, F']$ eine von zwei Elementen erzeugte Gruppe, deren Zentrum sicherlich $F''/[F, F']$ enthält; und diese letzte Gruppe ist nicht endlich erzeugbar. Es folgt, daß das Produkt endlich definierbarer NOETHERScher

Normalteiler einer endlich erzeugbaren Gruppe nicht NOETHERSCH zu sein braucht.

Zusatz 6. Ist N ein Normalteiler der endlich erzeugbaren Gruppe G , und existiert zu jedem $X < N$ erfüllenden Normalteiler X von G ein $X < Y \leq N$ erfüllender Normalteiler Y von G mit endlich definierbarer NOETHERSCHER Faktorgruppe Y/X , so ist N ein Produkt endlich definierbarer NOETHERSCHER Normalteiler von G .

Beweis. Wir bilden zunächst das Produkt M aller in N enthaltenen endlich definierbaren NOETHERSCHEN Normalteiler von G . Wäre $M \neq N$, so wäre $M < N$; und aus unserer zweiten Voraussetzung folgte die Existenz eines $M < W \leq N$ erfüllenden Normalteilers W von G mit endlich definierbarer NOETHERSCHER Faktorgruppe W/M . Da G nach Voraussetzung endlich erzeugbar ist, so folgt aus Satz 4, daß W ein Produkt NOETHERSCHER Normalteiler von G ist. Da W/M endlich erzeugbar ist, so gibt es einen $W = MV$ erfüllenden NOETHERSCHEN Normalteiler V von G . Dann ist $V \cap M$ eine endlich erzeugbare Untergruppe von M ; und da M ein Produkt endlich definierbarer NOETHERSCHER Normalteiler von G ist, so gibt es ein $V \cap M$ enthaltendes und in M enthaltenes Produkt P endlich vieler endlich definierbarer NOETHERSCHER Normalteiler von G . Weiter ist

$$PV/P \cong V/(V \cap P) = V/(V \cap M \cap P) = V/(V \cap M) \cong MV/M = W/M;$$

und W/M ist eine endlich definierbare NOETHERSCHE Gruppe. Nach Folgerung 2 sind aber Erweiterungen endlich definierbarer NOETHERSCHER Gruppen durch endlich definierbare NOETHERSCHE Gruppen ebenfalls endlich definierbare NOETHERSCHE Gruppen; und nun ergibt sich leicht, daß PV ein endlich definierbarer NOETHERSCHER Normalteiler von G ist, der in N und also in M enthalten ist. Folglich wird $M < W = MV \leq M$, ein Widerspruch, aus dem $M = N$ folgt, q. e. d.

Zusatz 7. Der Normalteiler N der endlich erzeugbaren Gruppe G ist dann und nur dann ein Produkt NOETHERSCHER fast-auflösbarer Normalteiler von G , wenn es zu jedem $X < N$ erfüllenden Normalteiler X von G einen $X < Y \leq N$ erfüllenden Normalteiler Y von G derart gibt, daß Y/X endlich oder endlich erzeugbar und abelsch ist.

Dies erschließt man leicht aus Zusatz 6, wenn man nur Lemma 2 und Folgerung 3 berücksichtigt.

Lokal-NOETHERSCHE Gruppen. Dies' sind Gruppen, deren sämtliche endlich erzeugbare Untergruppen NOETHERSCH sind. Lemma 2 zeigt, daß jedes Produkt NOETHERSCHER Normalteiler lokal-NOETHERSCH ist. Wir wollen jetzt von einer etwas allgemeineren Gruppenklasse zeigen, daß sie lokal-NOETHERSCH ist.

Satz 5. Die Gruppe G ist lokal-NOETHERSCH, wenn jedes homomorphe Bild $B \neq 1$ von G einen endlich definierbaren NOETHERSCHEN Normalteiler $N \neq 1$ besitzt.

Beweis. Es sei Σ die Menge aller Normalteiler X von G mit der Eigenschaft (Σ) Jede X enthaltende Untergruppe U von G mit endlich definierbarer NOETHERSCHER Faktorgruppe U/X ist lokal-NOETHERSCH.

Es ist klar, daß die Menge Σ nicht leer ist, da ja der Normalteiler 1 von G zu Σ gehört. Ist weiter Θ eine natürlich geordnete, nicht leere Teilmenge von Σ — so daß also für jedes X und Y in Θ entweder $X < Y$ oder $Y \leq X$ gilt — dann ist die Vereinigungsmenge V aller Normalteiler in Θ gewiß ein Normalteiler von G . Sei U eine V enthaltende Untergruppe von G mit endlich definierbarer NOETHERSCHER Faktorgruppe U/V und A eine endlich erzeugbare Untergruppe von U . Da U/V insbesondere endlich erzeugbar ist, so gibt es eine endlich erzeugbare Untergruppe B derart, daß $A \leq B$ und $U = VB$ ist. Aus

$$U/V = VB/V \simeq B/(B \cap V)$$

folgt dann, daß $B/(B \cap V)$ eine endlich definierbare NOETHERSCHE Gruppe ist. Da B endlich erzeugbar ist, so schließen wir aus Folgerung 1, daß $B \cap V$ sich von endlich vielen Klassen $K_1, \dots, K_n$ in B konjugierter Elemente erzeugen läßt. Ist x ein Element in K_i , so liegt x in V und also in einem geeigneten Normalteiler X_i aus Θ , der natürlich mit x auch alle zu x konjugierten Elemente enthält. Insbesondere ist also $K_i \leq X_i$. Da Θ natürlich geordnet ist, so gibt es unter den endlich vielen Normalteilern $X_1, \dots, X_n$ aus Θ einen umfassendsten Y . Da Y offenbar $K_1, \dots, K_n$ enthält, so ist auch $B \cap V \leq Y$. Aus $Y \leq V$ ergibt sich dann $B \cap V = B \cap Y$, so daß

$$U/V \simeq B/(B \cap V) = B/(B \cap Y) \simeq YB/Y$$

wird. Da mithin YB/Y endlich definierbar und NOETHERSCH ist, und da Y zu Σ gehört, so ist YB lokal-NOETHERSCH. Da A endlich erzeugbar und in YB enthalten ist, so ist A NOETHERSCH. Folglich ist U lokal-NOETHERSCH, womit dargetan ist, daß V zu Σ gehört. Auf die Menge Σ von Normalteilern von G läßt sich also das Maximumprinzip der Mengenlehre anwenden; und hieraus erschließen wir die Existenz eines maximalen Normalteilers M in Σ .

Da M/M endlich definierbar und NOETHERSCH ist, so ist M lokal-NOETHERSCH. Wäre $M \neq G$, so besäße das homomorphe Bild $G/M \neq 1$ von G nach Voraussetzung einen endlich definierbaren und NOETHERSCHEN Normalteiler $N/M \neq 1$. Ist U eine N enthaltende Untergruppe von G mit endlich definierbarer NOETHERSCHER Faktorgruppe U/N , so ist U/M als Erweiterung der endlich definierbaren NOETHERSCHEN Gruppe N/M durch die endlich definierbare NOETHERSCHE Gruppe U/N nach Folgerung 2 eine endlich definierbare NOETHERSCHE Gruppe. Da M die Eigenschaft (Σ) hat, so ist U lokal-NOETHERSCH; und damit ist gezeigt, daß auch N die Eigenschaft (Σ) hat. Dies widerspricht aber der Maximalität von M , da ja $M < N$ ist. Also ist $G = M$ eine lokal-NOETHERSCHE Gruppe, q. e. d.

Beispiel einer Gruppe, die den Voraussetzungen von Satz 5 genügt, ohne ein Produkt NOETHERSCHER Normalteiler zu sein: Es sei A eine abelsche Gruppe,

die weder endlich erzeugbar ist, noch Elemente der Ordnung 2 enthält. Die Gruppe G entstehe aus A durch Adjunktion eines Elements b , das den Bedingungen $(bx)^2 = 1$ für jedes x aus A genügt. Dann ist jede Untergruppe von A ein Normalteiler von G , so daß also A ein Produkt zyklischer Normalteiler von G ist. Weiter ist G/A eine zyklische Gruppe der Ordnung 2. Der kleinste b enthaltende Normalteiler von G enthält aber A^2 und ist also nicht NOETHERSCH. Lemma 2 zeigt nun, daß G kein Produkt NOETHERScher Normalteiler ist.

Zusatz bei der Korrektur (1. November 1956): Die Gruppe G ist sicher dann fast-auflösbar und erfüllt Bedingung (b) des Zusatz 4, wenn jedes homomorphe Bild $H \neq 1$ von G ein Element $h \neq 1$ enthält, zu dem es nur endlich viele in H konjugierte Elemente gibt. Endlich erzeugbare Gruppen dieser Art sind also NOETHERSCH, so daß also dieser Satz von DUGUID-MACLAIN als Spezialfall in unseren Kriterien enthalten ist.

Literatur

- BAER, REINHOLD: [1] Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung. *Math. Ann.* **129**, 139—173 (1955). — [2] Supersoluble groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* **6**, 16—32 (1955). — [3] Das Hyperzentrum einer Gruppe III. *Math. Z.* **59**, 299—338 (1953). — [4] Nilgruppen. *Math. Z.* **62**, 402—437 (1955). — [5] The hypercenter of a group. *Acta mathematica* **89**, 165—208 (1953). — HALL, PH.: [1] Finiteness conditions for soluble groups. *Proc. London Math. Soc.* **4**, 419—436 (1954). — HIRSCH, K.: [1] Eine kennzeichnende Eigenschaft nilpotenter Gruppen. *Math. Nachr.* **4**, 47—49 (1951).

Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, Illinois (USA)

(Eingegangen am 30. Juni 1956)



ACTA MATHEMATICA
ACTA PHYSICA

ACTA Academiae Scientiarum Hungaricae

Herausgegeben von der Mathematischen und physikalischen Abteilung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest.

Veröffentlicht abwechselnd in englischer, deutscher, russischer oder französischer Sprache Originalabhandlungen über Mathematik, bzw. Physik. Gibt die neuesten ungarischen Forschungsergebnisse aus diesen Gebieten bekannt. Mehrsprachige Inhaltszusammenfassungen, jährliches zusammenfassendes Inhaltsverzeichnis. Umfang: 20—40 Bogen pro Band. Jährlich erscheinen 1—2 Bände, je 4 Hefte enthaltend.

Pro Band DM 25,20

Andere mathematische Publikationen:

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

Herausgegeben vom Bolyai-Institut der Universität Szeged. Veröffentlicht in englischer, deutscher und französischer Sprache selbständige Mathematikabhandlungen der Forscher der Universität von Szeged, sowie Publikationen aus der Feder ausländischer Spezialwissenschaftler. Rezensionen in englischer, deutscher oder französischer Sprache. Jährlich erscheinen 1—2 Bände, je 4 Hefte enthaltend.

Pro Band DM 25,20

PUBLICATIONES MATHEMATICAE

Herausgegeben vom Mathematikinstitut der Universität „Lajos Kossuth“ in Debrecen. Publiziert in englischer, deutscher und französischer Sprache alle Zweige der höheren Mathematik behandelnde Artikel ungarischer und ausländischer Wissenschaftler. Veröffentlicht auch Buchbesprechungen.

Zweijährlich erscheint 1 Band, 4 Hefte enthaltend.

Pro Band DM 25,20

Richten Sie Ihre Bestellungen an:

„KULTURA“ Ungarisches Außenhandelsunternehmen für Bücher und Zeitungen
Zeitschriften-Abteilung · Budapest 62 · Postfach 149

Auf Wunsch senden wir Ihnen gerne unseren Zeitschriften-Katalog!

Acht- und neunstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen. Dargestellt mittels des Jacobischen Parameters q .

Eight and Nine Place Tables of Elliptical Functions.

Based on Jacobi's Parameter q .

Von Dr.-Ing. M. Schuler, Professor emeritus, Universität Göttingen, und Dr. phil. habil. H. Gebelein, Dozent, Bamberg. Mit einem englischen Text von Lauritz S. Larsen, B. S. Mit 11 Abbildungen. XXIV, 296 Seiten 4°. 1955.

Ganzleinen DM 58.—

Fünfstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen. Dargestellt mittels des Jacobischen Parameters q .

Five Place Tables of Elliptical Functions.

Based on Jacobi's Parameter q .

Von Dr.-Ing. M. Schuler, Professor emeritus, Universität Göttingen, und Dr. phil. habil. H. Gebelein, Dozent, Bamberg. Mit einem englischen Text von Lauritz S. Larsen, B. S. Mit 11 Abbildungen. XI, 114 Seiten Gr.-8°. 1955.

Ganzleinen DM 29.60

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Handbuch der Physik

Encyclopedia of Physics

Herausgegeben von S. Flügge, Marburg, Deutschland. 54 Bände. Mit Beiträgen in deutscher, englischer und französischer Sprache. Jeder Band ist einzeln käuflich.

Im April 1956 erschien:

Band I:

Mathematische Methoden I • Mathematical Methods I

Mit 37 Figuren. VII, 364 Seiten Gr.-8°. 1956.

Ganzleinen DM 72.—

Bei Verpflichtung zur Abnahme des gesamten Handbuches

Subskriptionspreis Ganzleinen DM 57.60

Inhaltsübersicht: **Grundbegriffe der klassischen Analysis**, gewöhnliche Differentialgleichungen, **Funktionentheorie**. Von J. Lense, München, Deutschland. — **Partielle Differentialgleichungen**. Von J. Lense, München, Deutschland. — **Elliptische Funktionen und Integrale**. Von J. Lense, München, Deutschland. — **Spezielle Funktionen der mathematischen Physik**. Von J. Meixner, Aachen, Deutschland. — **Randwertprobleme**. Von F. Schlögl, Köln, Deutschland. — **Sachverzeichnis** (Deutsch—Englisch); **Subject Index** (English—German).

Im November 1955 erschien:

Band II:

Mathematische Methoden II • Mathematical Methods II

Mit 98 Figuren. VII, 520 Seiten Gr.-8°. 1955.

Ganzleinen DM 88.—

Bei Verpflichtung zur Abnahme des gesamten Handbuches

Subskriptionspreis Ganzleinen DM 70.40

Inhaltsübersicht: **Algebra**. Von G. Falk, Aachen, Deutschland. — **Geometrie**. Von H. Tietz, Braunschweig, Deutschland. — **Functional Analysis**. By I. N. Sneddon, Stoke on Trent, Great Britain. — **Numerische und graphische Methoden**. Von L. Collatz, Hamburg, Deutschland. — **Moderne Rechenmaschinen**. Von H. Bückner, Schenectady, N.Y., USA. — **Sachverzeichnis** (Deutsch—Englisch); **Subject Index** (English—German).

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG